Lösungen zur Übungsklausur Mathematik 1 (WMS11D)

Oettinger 28.11.2011

Zeit: 60Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 66, 100%: 60 Punkte.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$$

Untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrie und bestimmen Sie Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung:

i) Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + 2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 = f(x)$$

Die Funktion ist gerade, also symmetrisch zur y-Achse.

ii) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 \approx \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}x^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 \approx \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^4 = \infty$$

iii) Nullstellen:
$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$$
Durch setzen von $z = x^2$ und $z^2 = x^4$ entsteht eine quadratische Gleichung
$$\frac{1}{4}z^2 - 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 8z + 8 = 0$$
$$z_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-8} = 4 \pm \sqrt{8}$$
Bei der Rücksubstitution: $x = \pm\sqrt{z}$ ergeben sich durch positive und negative Lösungen der Wurzel insgesamt 4 Werte für x:
$$x_1 = \sqrt{4+\sqrt{8}}, x_2 = -\sqrt{4+\sqrt{8}}, x_3 = \sqrt{4-\sqrt{8}}, x_4 = -\sqrt{4-\sqrt{8}}$$

iv) Extremwerte: Nullsetzen der ersten Ableitung
$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 - 2 \cdot 2 \cdot x = x \cdot (x^2 - 4) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \text{ erste Lösung } x_1 = 0, f(x_1) = 0 - 0 + 2 = 2$$
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 2, f(x_2) = f(x_3) = \frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4 + 2 = -2$$
Zur Entscheidung, ob es sich jeweils um ein Minumum, Maximum, Sattelpunkt handelt: zweite Ableitung
$$f''(x) = 3 \cdot x^2 - 4$$
$$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow (0;2) \text{ ist (lokales) Maximum}$$
$$f'''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow (2;-2) \text{ und } (-2;-2) \text{ sind (lokale) Minima}$$

v) Wendestellen: notwendig ist $f''(x) = 0$, also
$$f''(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{4/3}$$
Zusätzlich muss bei Vorliegen eines Wendepunkts $f''' \neq 0$ gelten (Vorzeichenwechsel von $f''(x_{1,2})$ genügt ebenfalls):
$$f'''(x) = 3 \cdot 2x, f'''(\pm\sqrt{4/3}) = \pm 6 \cdot \sqrt{4/3} \neq 0$$
$$f(\pm\sqrt{4/3}) = \frac{1}{4}\sqrt{4/3}^4 - 2\sqrt{4/3}^2 + 2 = \frac{1}{4}\frac{16}{9} - 2\frac{4}{3} + 2$$
$$= \frac{4 - 24 + 18}{9} = -\frac{2}{9}$$
$(\sqrt{4/3}; -\frac{2}{9})$ und $(-\sqrt{4/3}; -\frac{2}{9})$ sind Wendepunkte.

vi) Wertemenge: für große sowie kleine Variablenwerte strebt die Funktion gegen $+\infty$, es existieren lediglich zwei Minima gleicher Tiefe bei $(2;-2)$ und $(-2;-2)$. DerWertebereich ist also $W = [-2;\infty[$.

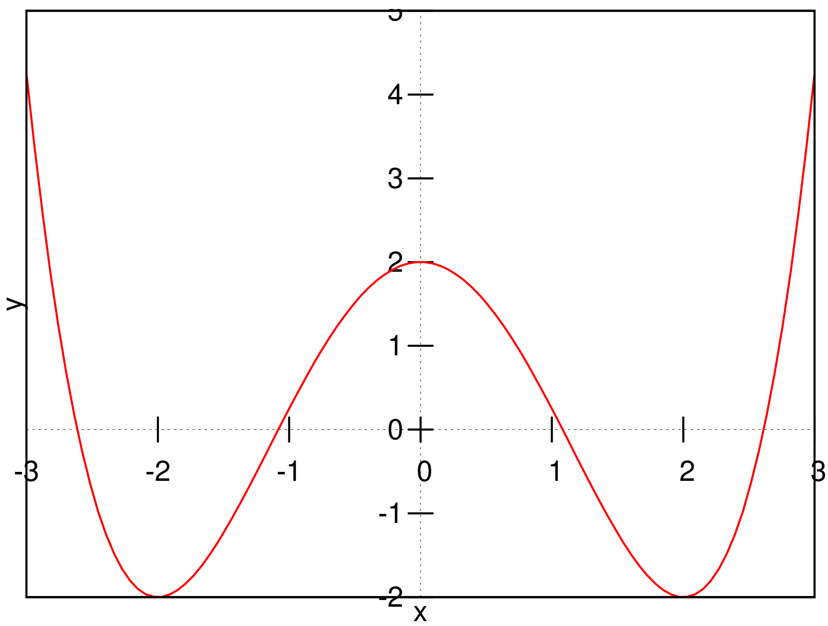

Abbildung 1: Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a)

$$x^{100}$$

b)

$$3x^7 + 11x^5 - 8x^3 - 7x + 9$$

c)

$$(2x+3)(2x-1)$$

d)

$$(x^2 - 5x)/(x^2 - 4)$$

e)

$$\sin(x) \cdot \cos(x)$$

<u>Lösungen:</u>

a)

$$(x^{100})' = 100 \cdot x^{100-1} = 100 \cdot x^{99}$$

b)

$$(3x^7+11x^5-8x^3-7x+9)' = 7 \cdot 3x^6+5 \cdot 11x^4-8 \cdot 3x^2-7 = 21x^6+55x^4+24x^2-7$$

c)

$$((2x+3)(2x-1))' = 2 \cdot (2x-1) + (2x+3) \cdot 2 = 4x - 2 + 4x + 6 = 8x + 4$$

d)

$$\big((x^2-5x)/(x^2-4)\big)' = \frac{(2x-5)(x^2-4) - 2x(x^2-5x)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 5x^2 - 8x - 20 - (2x^3 - 10x)}{(x^2-4)^2} = \frac{5x^2 + 2x - 20}{(x^2-4)^2}$$

e)

$$(\sin(x) \cdot \cos(x))' = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

(oder mit dem Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$)

$$= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1}$$

<u>Lösung:</u>

i) Induktionsanfang: $n_0 = 1$

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

ii) Induktionsschritt: (zu zeigen ist, dass die Beziehung für $n+1$ gilt, wenn angenommen wird, dass sie für n gilt)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Einsetzen der Gleichung (1):

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Multiplikation mit 6 und ausmultiplizieren der linken und der rechten Seite:

$$2n^3 + 6n^2 + 4n + 3n^2 + 9n + 6 = 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1)$$

$$2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$$

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $-(2-3x) - 3x = -1 - 1$

b) $-x + 2x^2 + (1-x)(1+2x) = -2$

c) $4x^3 + 48x^2 = -44x$

Lösungen:

a)

$$-(2-3x) - 3x = -1 - 1$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2 + 3x - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0, \text{ alle } x \in \mathbb{R} \text{ sind Lösungen}$$

b)

$$-x + 2x^2 + (1-x)(1+2x) = -2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 + 2x - x - 2x^2 = -2$$
$$\Leftrightarrow -3 = 0, \text{ es existiert keine Lösung}$$

c)

$$x^3 + 12x^2 + 11x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x^2 + 12x + 11) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

weitere Lösungen über die p, q-Form mit $p = 12, q = +11$:

$$x^2 + 12x - 11 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = -6 \pm \sqrt{6^2 - 11} = -6 \pm 5$$
$$x_2 = -11, x_3 = -1$$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionen im Definitionsbereich D auf Stetigkeit:

a) $f(x) = |2x| - x, D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{2}x + 3 \cdot \frac{x^4}{4}, D = \mathbb{R}$

Lösungen:

a) Betragsfreie Form:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x & \text{für } x \geq 0 \\ -2x - x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Grenzwerte bei $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} = \lim_{x \to 0+} 2x - x = \lim_{x \to 0+} x = 0+$$
$$\lim_{x \to 0-} = \lim_{x \to 0-} -2x - x = \lim_{x \to 0-} -3x = 0+$$

Die Funktion ist stetig.

b) $f(x)$ ist eine Summe stetiger Funktionen, also stetig.