Mathematik WMS11D
Musterlösung zu den Übungen

Aufgabe 1

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und $B = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$.
Die Schnittmenge $A \cap B := \{x \in M | x \in A$ und $x \in B\}$ ist

$$A \cap B = \{5, 7\},$$

die Vereinigung $A \cup B := \{x \in M | x \in A$ oder $x \in B\}$ ist

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17\}.$$

b) Die Menge $M = x \in \mathbb{Z} | x > 0$ ist die Menge der ganzen Zahlen, die größer als 0 sind, also die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Aufgabe 2

a) $3x + 2 = x - 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3x - x &= -1 - 2 \\ \Leftrightarrow 2x = -3 \Rightarrow x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 = x^2 + 5 &\Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \\ &\Leftrightarrow 2x = 5 - 1 = 4 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

c) $x^2 - 2 = 0$ Die Gleichung kann als $x^2 = 2$ geschrieben werden, also

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{2}.$$

Natürlich funktioniert hier auch die Mitternachtsformel oder die $p-q$-Formel (mit $p = 0$ und $q = 2$):

$$x_{1/2} = 0 \pm \sqrt{0+2} = \pm\sqrt{2}.$$

d) $2x^2 + 12 = 10x$ Durch Umschreiben und teilen der gesamten Gleichung durch 2 ergibt sich die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

die einfach über die $p-q$-Formel mit $p = -5$ und $q = 6$ gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

e) $2x^3 - 4x^2 + 6x = 0$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 4x + 6) = 0,$$

man erkennt sofort die erste Lösung $x_1 = 0$. Durch teilen der gesamten Gleichung durch $2x$ ergibt sich die Normalform einer quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x + 3 = 0,$$

die über die $p-q$-Formel gelöst werden kann:

$$x_{2/3} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{(\frac{2}{2})^2 - 3}$$

Da der Radikand der Wurzelfunktion negativ ist, ist hier keine Lösung der Gleichung möglich!

Aufgabe 3

Aufsuchen einer quadratischen Gleichung, die die Lösungen 11 und 3 hat: der Fundamentalsatz der Algebra sagt aus, dass eine Gleichung vom Grad 2 (quadratische Gleichung) genau zwei Lösungen hat und dass sich diese

Gleichung in der Form $(x - x_1)(x - x_2)$ darstellen lässt (x_1, x_2: Nullstellen, Lösungen der Gleichung). Also kann man ansetzen:

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 11)(x - 3) = x^2 - 3x - 11x + 33$$
$$= x^2 - 14x + 3 = 0.$$

Das ist die gesuchte Gleichung mit Lösungen 11 und 3.

Aufgabe 4

Vollständige Induktion:

a) Behauptung: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

i) Induktionsanfang: für $n_0 = 1$ gilt die Beziehung wegen $1 = 1(1+1)/2$.

ii) Induktionsschritt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n + (n+1) = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

b) Behauptung: $2^{3i} - 1$ ist immer durch 7 teilbar.

i) Induktionsanfang: $i_0 = 1$, dann gilt $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ ist durch 7 teilbar.

ii) Induktionsschritt: $2^{3(i+1)} - 1 = 2^{3i+3} - 1 = 2^{3i} \cdot 2^3 - 1 = 2^{3i} \cdot 8 - 1 = 2^{3i}(7+1) - 1 = 2^{3i} \cdot 7 + 2^{3i} - 1$.
Da $2^{3i} \cdot 7$ natürlich durch 7 teilbar ist und $2^{3i} - 1$ nach Voraussetzung durch 7 teilbar ist, folgt, dass auch $2^{3(i+1)} - 1$ durch 7 teilbar ist.