Aufgabe 1

(12 Punkte)

$$r(x) = |(x-3)^2 - 1|$$

a) $r(x)$ ist eine eindeutige Zuordnung und damit eine Funktion. Betragsfreie Darstellung:

$$r(x) = |(x-3)^2-1| = \begin{cases} (x-3)^2 - 1 & \text{für } x < 3-\sqrt{1} \\ -((x-3)^2-1) & \text{für } 3-\sqrt{1} \leq x \leq 3+\sqrt{1} \\ (x-3)^2 - 1 & \text{für } x > 3+\sqrt{1} \end{cases}$$

Symmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= |(-x-3)^2 - 1| = |(x+3)^2 - 1| \\ f(-x) &\neq f(x) = |(x-3)^2 - 1| \\ f(-x) &\neq -f(x) = -|(x-3)^2 - 1| \end{aligned}$$

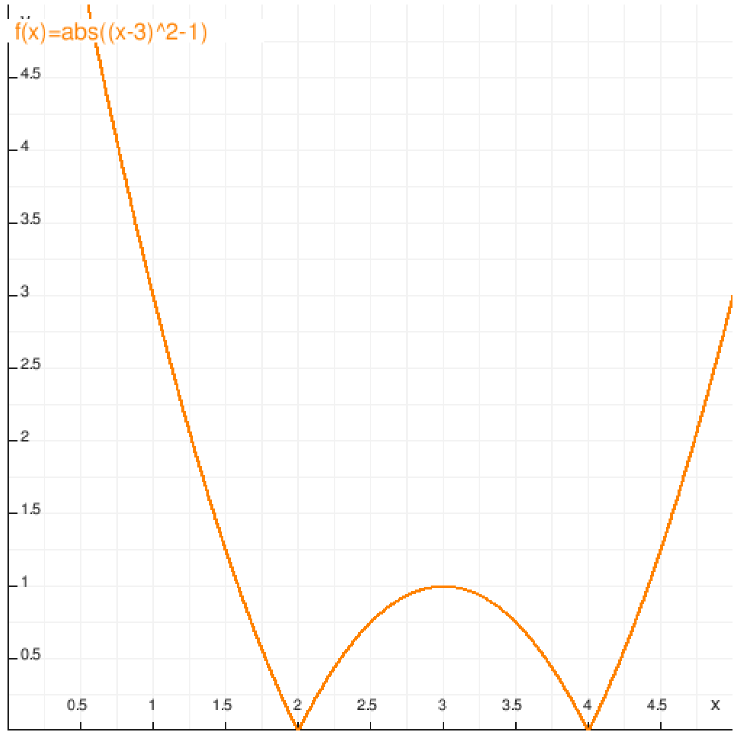
$\Rightarrow$ die Funktion ist nicht symmetrisch.

b) Die Funktion ist nicht monoton (sie ist monoton fallend bis zur ersten Nullstelle, danach steigt sie an). In den Nullstellen ist der linksseitige Grenzwert gleich dem rechtsseitigen, die Funktion ist definiert $\Rightarrow$ sie ist stetig.

c) Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x\to\infty} |(x-3)^2 - 1| = \lim_{x\to\infty} (x-3)^2 - 1 = \lim_{x\to\infty} x^2 - 6x + 8 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} |(x-3)^2 - 1| = \lim_{x\to\infty} ((-x)-3)^2 - 1 = \lim_{x\to\infty} x^2 + 6x + 8 = +\infty$$

d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(13 punkte)
Berechnen bzw. lösen Sie

a)

$$2(x^3 - x) + 4(1 - x^2) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

Normierung:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Die erste Lösung $x_1 = 1$ kann einfach geraten werden, die weiteren Lösungen über die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{array}{rrrr}
\big(\quad x^3 & -\,2x^2 & -\,x & +\,2\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-\,x^3} & \underline{+\,x^2} & & \\
 & -\,x^2 & -\,x & \\
 & \underline{x^2} & \underline{-\,x} & \\
 & & -\,2x & +\,2 \\
 & & \underline{2x} & \underline{-\,2} \\
 & & & 0
\end{array}$$

Zu lösen bleibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$
$$x_{2/3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{3}}$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 1; \; x_2 = -1 \; x_3 = 2$$

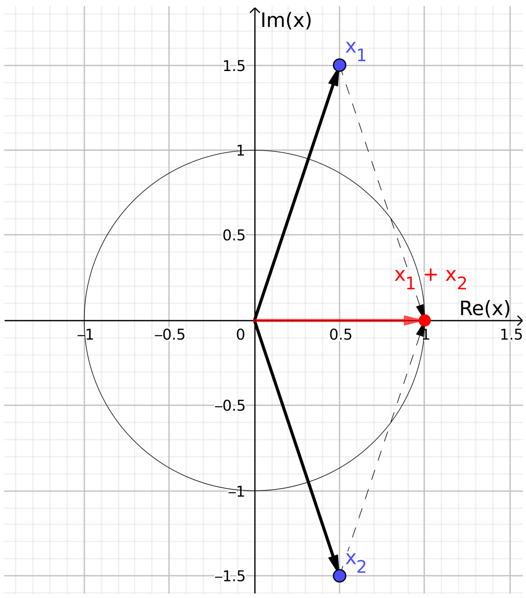
b)

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) + \prod_{k=1}^{3}(2k+1) = 1+3+5+7+9+3\cdot 5\cdot 7$$
$$= 25 + 105 = 130$$

c)

$$x^2 - x + \frac{5}{2} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{10}{4} = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{3}{2}$$

Eine geeignete grafische Darstellung in der Gauß-Ebene:



Die Summe beträgt

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - i \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Aufgabe 3

(8 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} a^2(x+4) & \text{für} \quad x < 1 \\ 3(10a - 15x) & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x_0 = 1$, wenn

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1-} a^2(x+4) = 5a^2 = \\ \lim_{x \to 1-} f(x) &= \lim_{x \to 1+} 3(10a + 15x) = 30a - 45 \\ \Leftrightarrow \quad 5a^2 &= 30a - 45 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 6a + 9 = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung fallen an der Stelle $x_1 = x_2 = 3$ zusammen. Die Funktion ist also stetig für $a = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} 9(x+4) & \text{für} \quad x < 1 \\ 3(30 - 15x) & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4

(6 Punkte)
Behauptung: für alle natürlichen Zahlen ist

$n^2 + n$ eine gerade Zahl.

Beweis über vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n_0 = 1$. Es gilt

$n_0^2 + n_0 = 1^2 + 1 = 2$ ist gerade.

Induktionsschritt: Voraussetzung ist $n^2 + n$ gerade.

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + n + 1 &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n}_{\text{gerade n. Vor.}} + 2n + 2 \\ &= n^2 + n + 2(n+1) \end{aligned}$$

Da $n + 1 \in \mathbb{N}$ muss $2(n+1)$ durch 2 teilbar sein.

Aufgabe 5

(5 Punkte):

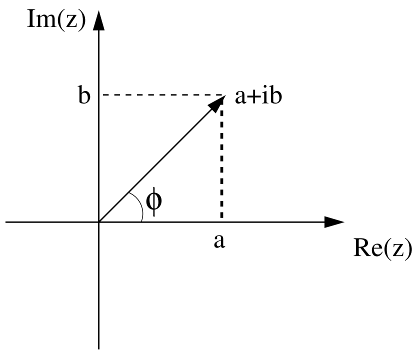
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}-\frac{x^5}{7!}+...\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

Der Ausdruck konvergiert, es existiert kein Grenzwert.

Aufgabe 6

(11 Punkte)

a) Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten $a = b = 1$ gilt $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$r, die beiden nicht rechten Winkel sind $45° = \pi/4$. Sinus und Kosinus sind dann $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) 

c) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z_1 = a+ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$z_1 = a + ib = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + i\cdot\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + i$$

Die Polardarstellung ist

$$z_1 = re^{i\cdot\varphi} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

d) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = \sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1} = 1 - i$.

e)

$$\begin{aligned}\frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|\overline{z_1}|^2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{3+i}{2} = \frac{1}{2}(3+i)\end{aligned}$$