Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM23

Juni 2024

Aufgabe 1

Es ist
$$\sqrt{\frac{28}{3}} = \sqrt{9 + \frac{1}{3}},$$
als Funktion für die Entwicklung empfiehlt sich also

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{9+x} = (9+x)^{1/2} && \Rightarrow \quad f(0) = \sqrt{9} = 3 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(9+x)^{-1/2} && \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(9+x)^{-3/2} && \Rightarrow \quad f''(0) = -\frac{1}{4\sqrt{9}^3} = -\frac{1}{4 \cdot 27} = -\frac{1}{108}
\end{aligned}$$

mit $f(x) = \sqrt{9+x}$ folgt also

$$\begin{aligned}
f(x) \approx T_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f(0)^{(k)}(0)}{k!} x \\
&= f(0) + f!(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 \\
&= 3 + \frac{x}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{108} \\
a = \sqrt{\frac{28}{3}} &= f(\frac{1}{3}) \\
&\approx 3 + \frac{1}{3 \cdot 6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2 \cdot 108} = 3,05504
\end{aligned}$$

Wert der Wurzel laut Taschenrechner: 3,05505.

Aufgabe 2

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^x$: die Exponentialfunktion ist sicher beliebig oft differenzierbar, wir können sehr einfach alle Ableitungen angeben:

$$f(x) = e^x \text{ und damit } f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Für die Reihenentwicklung um den Nullpunkt benötigen wir die Ableitungen an der Stelle $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Damit erhalten wir sofort die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Nicht gefragt: ihr Konvergenzradius ist

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

Die Reihe konvergiert beständig.

Aufgabe 3

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \ddot{\vec{s}}(t)$. Da $\vec{s}(t)$ nur einen Beitrag in y-Richtung enthält, genügt es natürlich, diese Richtung zu betrachten:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{e}{m}t^2 \\ \dot{s}(t) &= v(t) = \frac{2e}{m}t \\ \ddot{s}(t) &= \dot{v}(t) = a(t) = \frac{2e}{m} \\ &\Rightarrow F(t) = m \cdot a(t) = m\frac{2e}{m} = 2e \end{aligned}$$

Oder wieder in Vektorschreibweise:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

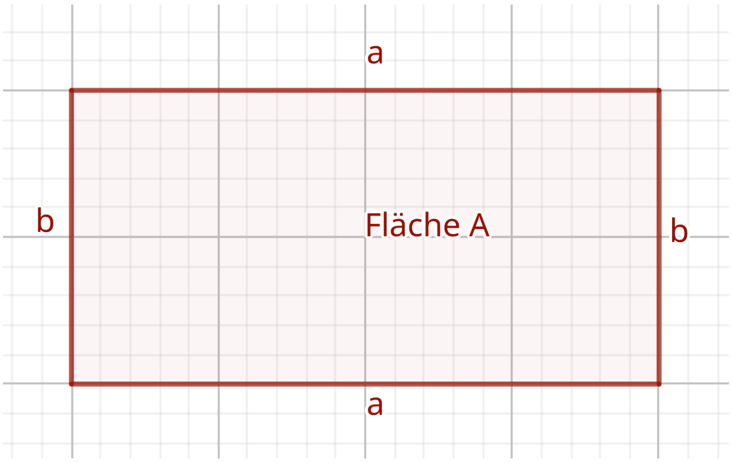

Abbildung 1: Zaun um eine Fläche

Hat der Zaun eine Länge von 20 (Umfang U, die Einheit ist hier der Einfachheiti halber weggelassen), so gilt

$$\begin{aligned} U &= 2a + 2b = 2(a+b) = 20 \\ &\Rightarrow a + b = 10 \\ &\Rightarrow a = 10 - b \end{aligned}$$

Die Fläche A wird zur Funktion der Länge b:

$$A = A(b) = a \cdot b = (10 - b) \cdot b$$

zur Bestimmung des Minimums kann abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{db} A(b) &= 10 - 2b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 5 \\ &\Rightarrow a = 10 - b = 5 = b \\ \frac{d^2}{db^2} A(b) &= -2 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum} \end{aligned}$$

Die maximale Fläche ist also $A = 25\text{m}^2$.

Aufgabe 5

Für die Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene gilt mit der Matrix S:

$$S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

als Gleichungssystem geschrieben

$$\begin{array}{llll} s_{11} \cdot x_1 & +s_{12} \cdot x_2 & +s_{13} \cdot x_3 & = x_1 \\ s_{21} \cdot x_1 & +s_{22} \cdot x_2 & +s_{23} \cdot x_3 & = x_2 \\ s_{31} \cdot x_1 & +s_{32} \cdot x_2 & +s_{33} \cdot x_3 & = -x_3 \end{array}$$

Damit sind die Koeffizienten $s_{33} = -1$, $s_{22} = 1$, $s_{11} = 1$ und alle weiteren $s_{ij} = 0$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5) &= 0 \\ x^2 - 5x + 5 &= 0 \\ x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} - \frac{20}{4} = \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Extrema:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x^2-5x+5)+e^x(2x-5)=e^x(x^2-3x)=0 \\
x^2-3x &= 0 \\
x_3 &= 0\ ;\quad x_4=3 \\
f(0) &= 5\ ;\quad f(3)=-e^3. \\
f''(x) &= e^x(x^2-3x)+e^x(2x-3)=e^x(x^2-x-3) \\
f''(0) &= -3<0\ ;\quad f''(3)=3e^3>0
\end{aligned}
$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.
Wendepunkte:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= e^x(x^2-3x)+e^x(2x-3)=e^x(x^2-x-3)=0 \\
x^2-x-3 &= 0 \\
&\Rightarrow x_{5,6}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx -12,11 \\
f(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}) &\approx 3,59
\end{aligned}
$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/-12,11)$ und $(-1,30/3,59)$. $f''(0)=e^0(0-0-3)=-3<0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x\to\pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} e^x\cdot\lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5)=+\infty \\
\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+5x+5}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0+
\end{aligned}
$$

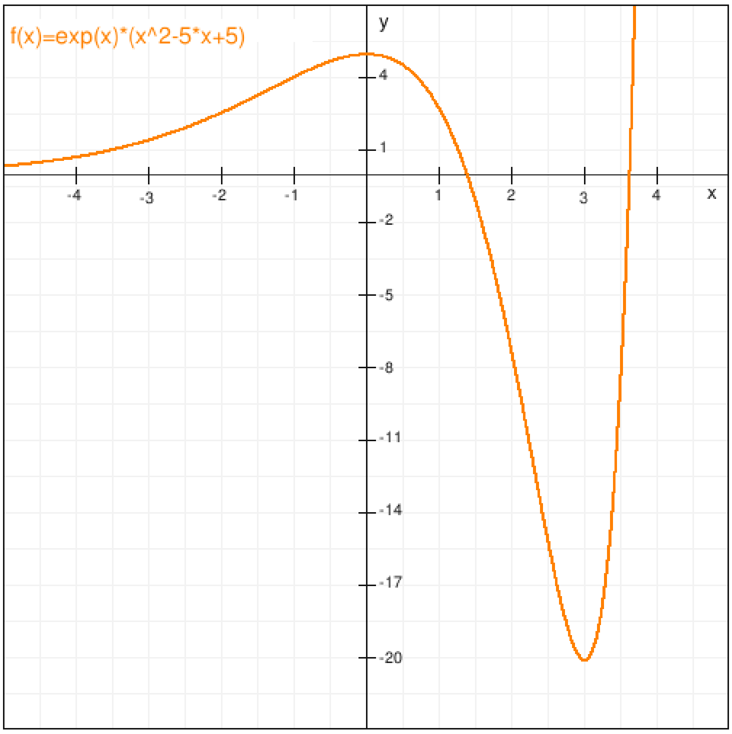

Abbildung 2: die Funktion $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5)$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 7

Ableitung von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x} :$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2-x) - (x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}):$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x}) \cdot \frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

d)

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x):$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x) + 1)$$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 2x^2 + 1 & \Rightarrow f(1) &= 4\\
f'(x) &= 3x^2 + 4x & \Rightarrow f'(1) &= 7\\
f''(x) &= 6x + 4 & \Rightarrow f''(1) &= 10\\
f^{(3)}(x) &= 6 & \Rightarrow f^{(3)}(1) &= 6\\
f^{(n)}(x) &= 0 \text{ für } n > 3.
\end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

da ab der vierten Ableitung alle weiteren verschwinden, gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{4}{0!}(x-1)^0 + \frac{7}{1!}(x-1)^1 + \frac{10}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3.$$

Unter Ausnutzen von $0! = 1$ folgt nach ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
4 + 7(x-1) + 7(x-1) + \frac{10}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3\\
= x^3 + 2x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung ist mit der ursprünglichen analytischen Darstellung identisch (da die Ableitungen einer Potenzreihe wieder eine Potenzreihe ergeben und die Darstellung der Funktion eindeutig ist). Daraus folgt für den Konvergenzradius natürlich, dass er dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ der Funktion entspricht.