Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM23

12.2024

Aufgabe 1

(a) Mit partieller Integration und der Beziehung $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int 2\,(\cos(x))^2\,dx &= 2\left[\sin(x)\cos(x) + \int (\sin(x))^2\,dx\right] \\
&= 2\left[\sin(x)\cos(x) + \int 1 - (\cos(x))^2\,dx\right] \\
&= 2\sin(x)\cos(x) + 2x - 2\int (\cos(x))^2\,dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 4\int (\cos(x))^2\,dx = 2\sin(x)\cos(x) + 2x + C$$

$$\Rightarrow \quad \int (\cos(x))^2\,dx = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + C$$

(b) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$:

$$\begin{aligned}
\int 2x^2 \cdot e^x dx &= 2x^2e^x - \int 4xe^x dx \\
&= 2x^2e^x - \left[4xe^x - \int 4e^x dx\right] \\
&= 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x + C = (2x^2 - 4x + 4)e^x + C
\end{aligned}$$

(c) $\int 4xe^{3x^2}dx$: Substitution $u(x) = 3x^2$, also

$$\frac{du(x)}{dx} = 6x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{6x}$$

$$\int 4xe^{3x^2}dx = \int 4xe^u \frac{du}{6x} = \frac{2}{3}\int e^u du = \frac{2}{3}e^u + C$$

Rücksubstitution:

$$\int 4xe^{3x^2}dx = \frac{2}{3}e^{3x^2} + C$$

(d)

$$\int \cos^2(x) \cdot \tan(x)dx = \int \cos^2(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \cos(x)\sin(x)dx$$

$$= \int u \cdot \cos(x)\frac{du}{\cos(x)} = \int udu = \frac{u^2}{2} + C$$

Rücksubstitution:

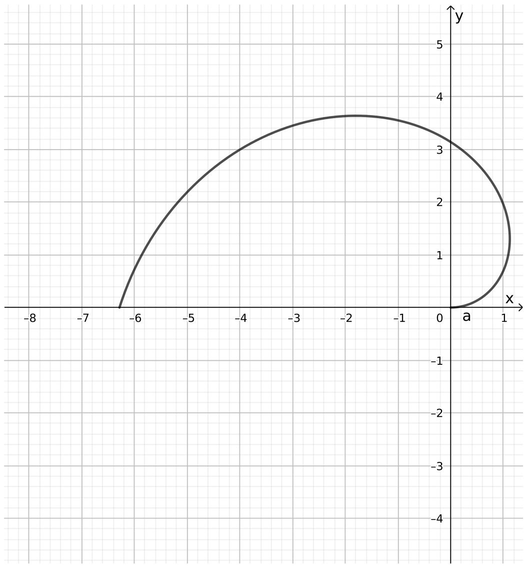
$$= \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$f : 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2 \cdot \varphi$$

gegebenen Figur handelt es sich um die erste halbe Umdrehung einer archimedeschen Spirale.



Berechnung der Fläche in Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$
\begin{aligned}
A &= \iint dA = \int_{r=0}^{2\varphi} \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{4\varphi^2}{2} d\varphi \\
&= 2 \left[\frac{1}{3}\varphi^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Die Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{3}{2}y(x) = \frac{9}{2}e^{3x}$$

ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

a) Die zugehörige homogene DGL kann über Separation der Variablen gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
y_0'(x) + \frac{3}{2}y_0(x) &= 0 \\
\int \frac{dy_0}{y_0} &= -\frac{3}{2} \int dx \\
y_0(x) &= C \cdot e^{-\frac{3}{2}x}
\end{aligned}
$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung: ein geeigneter Ansatz ist der verallgemeinerte Störterm

$$y_p(x) = a \cdot e^{bx} \quad \Rightarrow \quad y_p'(x) = abe^{bx}$$

$$y_p'(x) + \frac{3}{2}y_p(x) = ab \cdot e^{bx} + \frac{3}{2}a \cdot e^{bx}$$

$$= \left(ba + \frac{3}{2}a\right) a^{bx} = \frac{9}{2}e^{3x} \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

$$\left(3a + \frac{3}{2}a\right) = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$y_p(x) = e^{3x}$$

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C \cdot e^{-\frac{3}{2}x} + e^{3x}$$

mit $y(0) = C + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$y(x) = e^{3x}$$

b) mit Hilfe der Laplace-Transformation Transformation der DGL:

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}\{y(x)\} = \frac{9}{2}\mathcal{L}\{e^{3x}\}$$

$$sF(s) - y(0) + \frac{3}{2}F(s) = \frac{9}{2}\frac{1}{s-3}$$

$$F(s)\left(s + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\frac{1}{s-3} + 1 = \frac{9 + 2s - 6}{2(s-3)}$$

$$= \frac{2}{2(s-3)}\left(s + \frac{3}{2}\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s-3} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} = e^{3x}$$

Aufgabe 4

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

$$3\lambda = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \ldots$$

$$\Rightarrow 3\lambda = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 6\lambda$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \;\; \forall n > 0; \;\; b_n = 0.$$

Alternativ findet man die Koeffizienten über die Integrationen

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 3\lambda\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = 3\lambda\frac{2\pi}{\pi} = 6\lambda$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3\lambda\cos(nx)dx = \frac{3\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 3\lambda\sin(nx)dx = \frac{3\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0$$

Aufgabe 5

Anfangswertproblem:

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx}$$
$$= Ce^{\frac{1}{2}\ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

$$\text{Ansatz: } y = C(x)\sqrt{x},$$
$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$2xC'(x)\sqrt{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$
$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$$
$$C(x) = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

$$\Longrightarrow K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

Die Differentialgleichung

$$y' = a(1-y)y$$

ist eine nichtlineare, homogene, gewöhnliche DGL 1. Ordnung. Ihre allgemeine Lösung kann durch Separation der Variablen gefunden werden:

$$\begin{aligned}
y' &= a(1-y)y \\
\frac{dy}{dx} &= a \cdot (1-y)y \quad \Leftrightarrow \int \frac{dy}{(1-y)y} = \int a dx \\
&\text{mit Partialbruchzerlegung} \\
\int \frac{dy}{(1-y)y} &= \int \frac{1}{y}dy - \int \frac{1}{y-1}dy \\
&= \ln|y| - \ln|y-1| = \ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = \int a dx = ax + \ln|C| \\
&\Rightarrow \frac{y}{y-1} = Ce^{ax} \quad \text{aufgelöst nach } y(x) \\
y(1 - Ce^{ax}) &= -Ce^{ax} \\
y(C - e^{ax}) &= -e^{ax} \quad (C \text{ ist Integratonskonstante!}) \\
y(x) &= \frac{e^{ax}}{e^{ax} + C}
\end{aligned}$$