

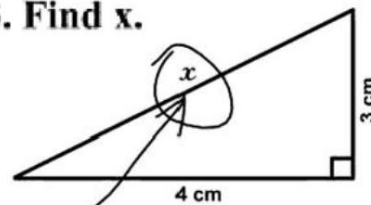
Übungsklausur Mathematik I

TML21

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

3. Find x.



Here it is

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{e^{|x|}}$$

mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

- Schreiben Sie die Funktion in betragsfreier Form und untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrie. Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion? (3 Punkte)
- Untersuchen Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)
- Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$? Wenn ja, welchen? (2 Punkte)
- Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-5; 5]$. (3 Punkte)

Aufgabe 2

(6 + 4 Punkte)

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^x$$

(Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$).

- b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{2n+1}$ gegen den Grenzwert $g = \frac{1}{2}$ konvergiert.

Aufgabe 3

(6 Punkte) Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

(5 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Euler-Relation

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

die Potenzreihen des Sinus und des Kosinus.

Aufgabe 5

(9 Punkte) Gegeben sind die Ebene E und die Gerade g :

$$E : 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.
b) Schneidet die Ebene E die x_2 -Achse?

Aufgabe 6

Zwei Objekte A und B werden beschrieben durch

$$A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Um welche Objekte handelt es sich bei A und B ?
- Besitzen die Objekte einen oder mehrere gemeinsame Punkte? Welche? Was bedeutet das?
- der Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt den Punkt $P = (0, 0, 1)$, er kann an der durch x_1 und x_2 gebildeten Ebene gespiegelt werden (der gespiegelte Punkt ist $Q = (0, 0, -1)$). Drücken Sie die Spiegelung durch eine Matrixoperation $S \cdot \vec{x}$ für den allgemeinen Vektor \vec{x} aus.

Aufgabe 7

(7 Punkte) Das Symbol $0,\bar{9}$ (Periode) kann mit Hilfe einer Reihendarstellung als

$$0,\bar{9} := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 0,999999999\dots$$

definiert werden. Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die Beziehung (\equiv : identisch)

$$0,\bar{9} \equiv 1$$

gilt.