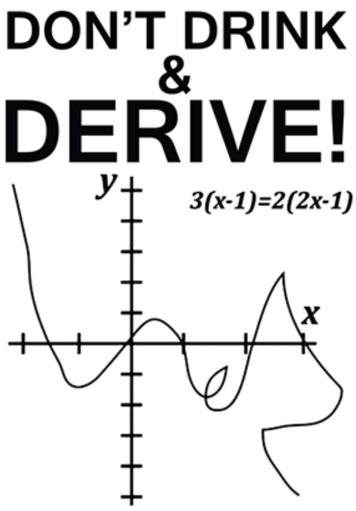
Übungsklausur Mathematik II

TMM22

Juni 2023



Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Zahl

$$a = \sqrt{\frac{28}{3}}$$

näherungsweise durch ein Taylorpolynom bis $n = 2$.

Aufgabe 2

Enwickeln Sie die Funktion $f(x) = e^x$ um die Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe.

Aufgabe 3

Ein Elektron bewegt sich mit der Zeit t unter dem Einfluss einer äußeren Kraft $\vec{F}(t)$ (die Geschwindigkeit ist zu jeder Zeit sehr viel kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit!) entlang der Bahn

$$\vec{s}(t) = \frac{t^2}{m}\begin{pmatrix}0\\e\\0\end{pmatrix}\ ;\ t > 0$$

Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}(t)$

Aufgabe 4

Die Bremskraft einer Wirbelstrombremse sei durch

$$K(v) = \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}, v > 0$$

als Funktion der Umfangsgeschwindigkeit v gegeben. Die Parameter a und b sind dabei konstant. Bei welchem Wert v wird $K(v)$ am größten und wie lautet der größte Wert von K (es ist keine zweite Ableitung gefordert!)? Was bedeuten die Lösungen für v mit unterschiedlichen Vorzeichen?

Aufgabe 5

der Vektor

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

beschreibt den Punkt $P = (0, 0, 1)$, er kann an der durch x_1 und x_2 gebildeten Ebene gespiegelt werden (der gespiegelte Punkt ist $Q = (0, 0, -1)$.

Allgemein gilt für eine Spiegelung an der x_1-x_2-Ebene: der Punkt $P = (x_1, x_2, x_3)$ wird in den Punkt $Q = (x_1, x_2, -x_3)$ übergeführt. Drücken Sie die Spiegelung durch eine Matrixoperation $S \cdot \vec{x}$ für den allgemeinen Vektor $\vec{x}$ aus.

Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion:

$$f : x \longmapsto e^x(x^2 - 5x + 5); x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie Nullstellen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrema/Wendestellen und das Verhalten für große/kleine Variablenwerte. Zeichnen (Skizze!) Sie die Funktion in einem geeigneten Intervall.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

a)
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

b)
$$f(x) = \frac{x^2 + x}{2x - x^2}$$

c)
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x})$$

d)
$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

Aufgabe 8

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Was lässt sich aus dem Ergebnis für den Konvergenzradius schließen (die Berechnung des Konvergenzradius ist nicht nötig)?