Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM22

M. Oettinger 29.06.2023

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)
Die Funktion $P(x)$ beschreibt den Wert des Produkts aus Vorgänger und Nachfolger der Zahl x:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1 \\ P'(x) &= 2x \\ P''(x) &= 2 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Minumums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned} 2x = 0 &\Leftrightarrow x_0 = 0 \\ P''(x_0) = 2 > 0 &\quad\Rightarrow\quad \text{Minimum} \end{aligned}$$

Die Form der Kurve lässt sich dem Ausdruck $P(x) = x^2 - 1$ direkt entnehmen - es handelt sich um eine um den Betrag 1 nach unten verschobene Normalparabel, die nur für $x \in \mathbb{Z}$ definiert ist.

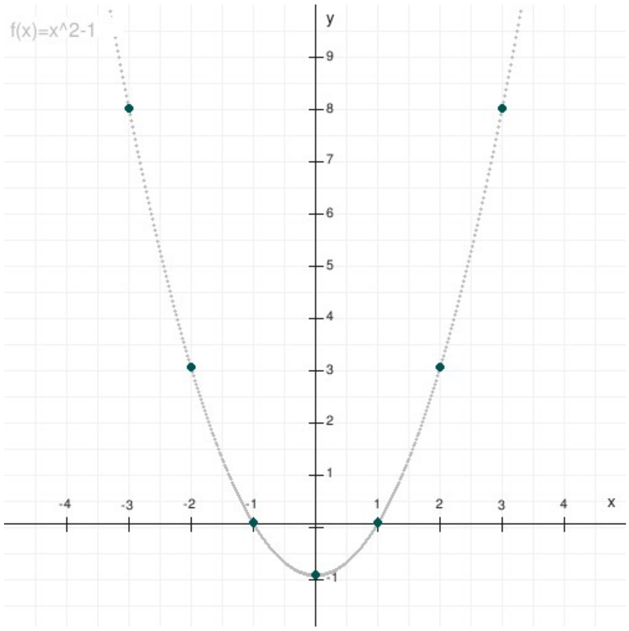

Abbildung 1: Die Funktion $P(x)$.

Aufgabe 2

(6 Punkte)
Ableitungen der folgenden Funktionen

a)

$$\left(e^{\sin(x)+\cos(x)}\right)' = e^{\sin(x)+\cos(x)}(\cos(x) - \sin(x))$$

b)

$$\left(e^{\cos(x^2)}\right)' = e^{\cos(x^2)}(-\sin(x^2)) \cdot 2x$$

c)

$$\left(\frac{2x}{3x^2+2}\right)' = \frac{2(3x^2+2) - 2x \cdot 6x}{(3x^2+2)^2} = \frac{6x^2+4-12x^2}{(3x^2+2)^2} = \frac{-6x^2+4}{(3x^2+2)^2}$$

Aufgabe 3

(5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 5 \qquad x \in \mathbb{R}$.

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 5 \\ &= (x+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Normalparabel mit Scheitel in $(-2/1)$.

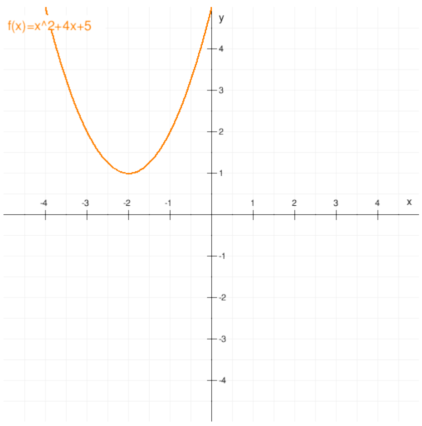

Abbildung 2: Die Funktion $f(x)$.

b) Entwicklung in eine Potenzreihe um $x_0 = 2$: Eine Entwicklung ist hier nicht nötig - die Funktion hat als Taylorentwicklung (Potenzreihe) exakt dieselbe Gestalt - der Ausdruck $f(x) = x^2 + 4x + 5$ ist ja bereits eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ mit den speziellen Koeffizienten $a_n = 0 \quad \forall n > 2$ (die Darstellung der Funktion muss natürlich eindeutig sein).

Natürlich lässt sie sich aber auch berechnen (nicht gefordert!):

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 + 8 + 5 = 17 \\ f' &= 2x + 4 \qquad \Rightarrow \qquad f'(2) = 4 + 4 = 8 \\ f'' &= 2 \qquad \Rightarrow \qquad f''(2) = 2 \\ f^{(n)} &= 0 \qquad \forall n > 2. \end{aligned}$$

also lautet die Taylorentwicklung

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= \frac{f(2)}{0!} + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 \\
&= 17 + 8(x-2) + (x-2)^2 = x^2 + 4x + 5.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(15 Punkte)
Kurvendiskussion für $f(x) = x^4 - 2x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ mit den Ableitungen

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 4x \\
f''(x) &= 12x^2 - 4 \\
f^{(3)}(x) &= 24x
\end{aligned}
$$

- Wertebereich: die tiefsten Stellen der Funktion sind die beiden Minima (s.u.), es ist also $W = [-1; \infty[$, denn mit $u = x^2$ ist $u \in \mathbb{R}$ und $f(x) = u^2 - 2u \geq -1 \; \forall \, u \in \mathbb{R}$.

- Symmetrie:

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x),$$

  die Funktion ist gerade (spiegelsymmetrisch zur y-Achse.

- Nullstellen: mit der Substitution $u = x^2$

$$
\begin{aligned}
x^4 - 2x^2 = u^2 - 2u = u(u-2) &= 0 \\
u &= 0 \quad \Rightarrow x_0 = 0 \quad \text{ist eine Nullstelle} \\
(u-2) = 0 \quad &\Rightarrow u = 2 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{u} = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

- Extrema:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 4x = 0 \\
&\quad x^3 - x = x(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 0 \\
&\quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x_{4/5} = \pm 1 \\
&\quad f(0) = 0; \quad f(1) = f(-1) = -1 \\
f''(0) &= 12 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum bei } (0;0) \\
f''(1) &= f''(-1) = 8 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minima bei } (\pm 1; -1)
\end{aligned}
$$

- Wendestellen:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 12x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \\
x_{6/7} &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\
f^{(3)}(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) &= \pm\frac{24}{\sqrt{3}} = \pm 8\sqrt{3} \neq 0 \\
f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{5}{9} \approx -0,56
\end{aligned}
$$

  Die Funktion hat zwei Wendepunkte bei $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{9})$.

- Krümmungsverhalten:

$$
f''(0) = 12 \cdot 0 - 4 < 0
$$

  Die Funktion ist bei $x = 0$ rechtsgekrümmt. Sie muss also vor dem ersten Wendepunkt ($x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$) und nach dem zweiten Wendepunkt ($x > \frac{1}{\sqrt{3}}$) linksgekrümmt sein.

- Verhalten bei großen/kleinen Variablenwerten ($f(x)$ ist ein Quotient von Polynomen):

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^4 - 2x^2 = +\infty \\
&\lim_{x\to-\infty} x^4 - 2x^2 = \lim_{x\to\infty} (-x)^4 - 2(-x)^2 = \lim_{x\to\infty} x^4 - 2x^2 = +\infty
\end{aligned}
$$

Skizze der Funktion:

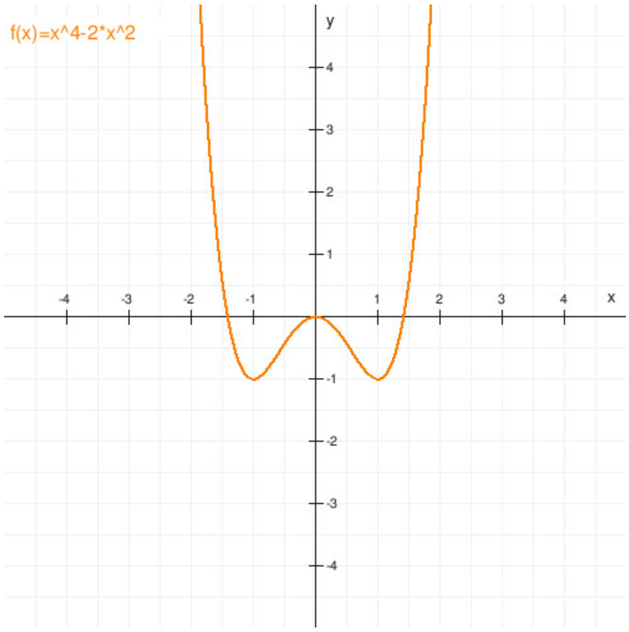

Abbildung 3: Die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Aufgabe 5

(7 Punkte)
Die Scheinwerfer blenden, wenn sie direkt auf Alice gerichtet sind - die Tangente an die Kurve muss also durch den Punkt A gehen. Für dieTangentengleichung wird die erste Ableitung benötigt:

$$k(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{2}$$
$$k'(x) = -x + 1$$

Die Tangentengleichung an die Kurve in x_0 ist

$$\begin{aligned} t(x) &= k(x_0) + k'(x_0)(x - x_0) \\ &= -\frac{x_0^2}{2} + x_0 + \frac{7}{2} + (-x_0 + 1)(x - x_0) \\ &= -\frac{x_0^2}{2} + x_0 + \frac{7}{2} - x_0 x + x_0^2 + x - x_0 \\ &= \frac{x_0^2}{2} - x_0 x + x + \frac{7}{2} \quad \text{mit} \\ t(1) &= -\frac{x_0^2}{2} - x_0 + 1 + \frac{7}{2} = \frac{x_0^2}{2} - x_0 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \\ 0 &= x_0\left(\frac{x_0}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind die beiden Stellen, an denen die Tangente an die Kurve durch den Punkt gehen: $x_0 = 0$ und $x_0 = 2$ mit den Funktionswerten $k(0) = k(2) = \frac{7}{2}$.

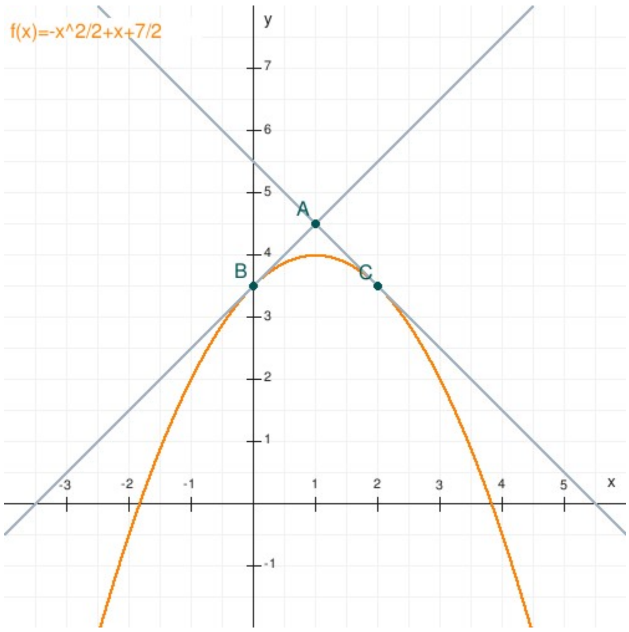

Abbildung 4: Bob und Charlie fahren Kurven

Aufgabe 6

(8 Punkte)
Gegeben sind die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Der transponierte Vektor x^T zum gegebenen Vektor x ist

$$x^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Die geforderten Produkte sind

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$xA = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist nicht berechenbar.}$$

$$x^T A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist das Resultat ebenfalls von der Dimension $AB \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ kann von links mit dem Produkt multipliziert werden:

$$ABx = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$