Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM/TML22

M. Oettinger, Dez. 2023

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

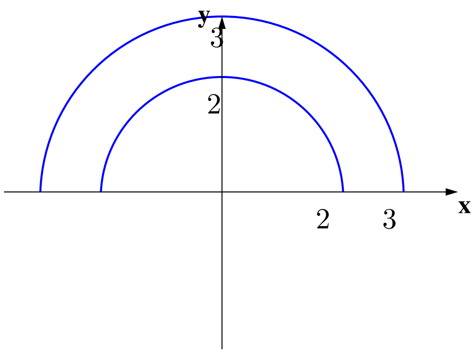

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

Bereich $(A): \; 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \; ; \quad y \geq 0$.

a) Fläche des Bereichs (A):

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int_{r=2}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \pi \int_{2}^{3} r dr$$

$$= \pi \left[\frac{r}{2} \right]_2^3 = \pi \frac{9-4}{2} = \pi \frac{5}{2}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{(A)} y dA &= \int_{r=2}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} r \sin(\varphi) r dr d\varphi \\
&= [-\cos(\varphi)]_0^{\pi} \int_2^3 r^2 dr = (-1-(-1)) \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^3 \\
&= 2 \cdot \frac{27-8}{3} = \frac{38}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(10 Punkte) Berechnung von Integralen:

a) Mit partieller Integration und der Beziehung $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$:

$$
\begin{aligned}
\int 2\left(\cos(x)\right)^2 dx &= 2\left[\sin(x)\cos(x) + \int \left(\sin(x)\right)^2 dx\right] \\
&= 2\left[\sin(x)\cos(x) + \int 1 - \left(\cos(x)\right)^2 dx\right] \\
&= 2\sin(x)\cos(x) + 2x - 2\int \left(\cos(x)\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad 4\int \left(\cos(x)\right)^2 dx = 2\sin(x)\cos(x) + 2x + C
$$

$$
\Rightarrow \quad \int \left(\cos(x)\right)^2 dx = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{x}{2} + C
$$

b)

$$
\int_0^{\pi} x\cos(2x) dx
$$

partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\cos(2x) dx &= \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{\sin(2x)}{2} dx \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0
\end{aligned}
$$

c)

$$\int 4xe^{x^2}dx$$

kann direkt durch die Substitution $u = x^2$ gelöst werden:

$$\frac{du(x)}{dx} = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 4xe^{x^2}dx = 4\int xe^u \frac{du}{2x} = 2\int e^u du = 2e^u + C$$

$$= 2e^{x^2} + C$$

Aufgabe 3

(6 Punkte)

(a)

$$y'y + 2y = \sqrt{x} \tag{1}$$

$$y''y + 12y = y\cos(x) \tag{2}$$

$$12y + 3y' - y = 0 \tag{3}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.
Gleichung (3) ist eine lineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (3) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter. Durch die Randbedingung wird einer der beiden Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4

(9 Punkte)

$$y' - 2x \cdot y = 7x$$

ist eine gewöhnliche, lineare und inhomogene DGL 1. Ordnung. Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\begin{aligned}
y_h' - 2x \cdot y_h &= 0 \\
\frac{dy_h}{dx} = 2x \cdot y_h \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{dy_h}{y_h} = \int 2x \cdot dx \\
\ln|y_h| &= 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \ln|C| = x^2 + \ln|C| \\
y_h(x) &= C \cdot e^{x^2}
\end{aligned}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$y(x) = C(x) \cdot e^{x^2}; \qquad y'(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2}$$

in DGL

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - C(x)2xe^{x^2} = C'(x)e^{x^2} = 7x$$

$$\int C'(x)dx = C(x) = \int 7xe^{-x^2}dx$$

Das Integral kann direkt durch die Substitution $u = -x^2$ gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\frac{du(x)}{dx} &= -2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = -\frac{du}{2x} \\
C(x) &= \int 7xe^{-x^2}dx = -7\int xe^u \frac{du}{2x} = -\frac{7}{2}\int e^u du = -\frac{7}{2}e^u + C \\
&= -\frac{7}{2}e^{-x^2} + C
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$y(x) = C(x) \cdot e^{x^2} = \left(-\frac{7}{2}e^{-x^2} + C\right)e^{x^2} = -\frac{7}{2} + C \cdot e^{x^2}$$

Aufgabe 5

Differentialgleichung (6 Punkte)

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,t) - k^2\frac{d^2}{dt^2}y(x,t) = 0,$$

eine lineare, partielle und homogene DGL 2. Ordnung. $y(x) = \sin(kx - t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt:

$$y' = k \cdot \cos(kx - t); \quad y'' = -k^2 \sin(kx - t)$$
$$\dot{y} = (-1)(-\cos(kx - t)); \quad \ddot{y} = -\sin(kx - t)$$

Eingesetzt in die DGL: $y'' - k^2\ddot{y} = 0 \Rightarrow y(x,t)$ ist Lösung der DGL.

Aufgabe 6

(6 Punkte)
$f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(x)\sin(nx)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Als einziger Term bleibt also $b_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \sin(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Sinus ungerade ist, es müssen also alle geraden Terme verschwinden ($a_0 = 0, a_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + \dots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $b_1 = \pi$.

Aufgabe 7

(9 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}N(t) + \lambda N(t) &= 0\\ \frac{d}{dt}N(t) &= -\lambda N(t)\\ \frac{dN(t)}{N(t)} &= -\lambda dt\\ \ln(|N(t)|) &= -\lambda t + \ln(|C|)\\ N(t) &= C \cdot e^{-\lambda t}\\ N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{N(t)\} = F(s)$$

und der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{\dot{N}(t)\} = s\mathcal{L}\{N(t)\} - N(0)$$

und der Randbedingung $N(0) = N_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned}sF(s) - N_0 + \lambda F(s) &= 0\\ \Rightarrow F(s) &= \frac{N_0}{s+\lambda}\\ N(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = N_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$