

Aufgabe 1

(14 Punkte)

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 4x + 3|; \quad x \in \mathbb{R} \\ &= |x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2 + 3| = |(x - 2)^2 - 1| \\ \text{mit } (x - 2)^2 - 1 &= 0 \quad \Rightarrow \\ x_1 &= 1; \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

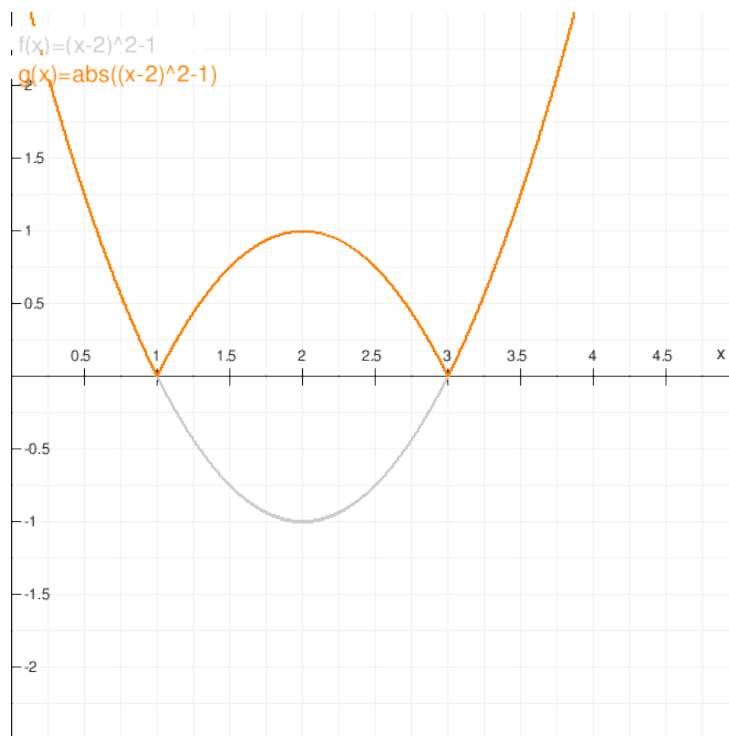
Es handelt sich um eine eindeutige Zuordnung für alle $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ ist eine Funktion. Die Funktion hat die Form einer verschobenen Parabel mit Scheitel bei $(2 | -1)$, der Betrag spiegelt den Bogen unterhalb der x -Achse zwischen $x = 1$ und $x = 3$ ins Positive. Die Betragsfreie Form lautet

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2)^2 - 1 & \text{für } x \in [1; 3] \\ -((x - 2)^2 - 1) = 1 - (x - 2)^2 & \text{für } x \notin [1; 3] \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - (x - 2)^2 = 1 - 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2)^2 - 1 = 0 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} 1 - (3 - 2)^2 = 1 - 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2)^2 - 1 = 0 = f(3) \end{aligned}$$

Die Funktion ist in $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ stetig. Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(13 punkte)

Berechnen bzw. lösen Sie

a)

$$2x^3 - 6(x^2 + 1) = 1$$

Normierung:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Die erste Lösung $x_1 = 1$ kann einfach geraten werden, die weiteren Lösungen über die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 -2x^2 + 3x \\
 \underline{2x^2 - 2x} \\
 x - 1 \\
 \underline{-x + 1} \\
 0
 \end{array}$$

Zu lösen bleibt die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 1 \quad x_3 = 1$$

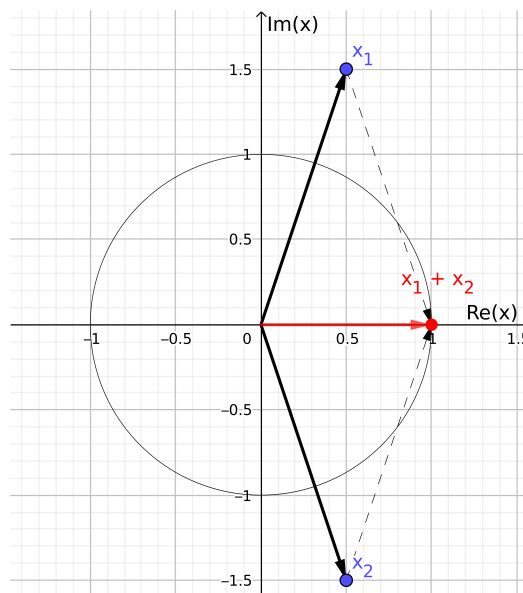
b)

$$\sum_{k=1}^5 (2k - 1) + \prod_{k=1}^3 (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$= 25 + 105 = 130$$

c)

$$x^2 - x + \frac{5}{2} = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{10}{4} = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{3}{2}$$

Eine geeignete grafische Darstellung in der Gauß-Ebene:



Die Summe beträgt

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - i \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Aufgabe 3

(8 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} a^2(x+4) & \text{für } x < 2 \\ 3(10a-6x) & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x_0 = 2$, wenn

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} a^2(x+4) = 6a^2 = \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} 3(10a+6x) = 30a - 36 \\ \Leftrightarrow 6a^2 &= 30a - 36 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 5a + 6 = 0 \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Behauptung: für alle natürlichen Zahlen ist

$$n^2 + n \text{ eine gerade Zahl.}$$

Beweis über vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n_0 = 1$. Es gilt

$$n_0^2 + n_0 = 1^2 + 1 = 2 \text{ ist gerade.}$$

Induktionsschritt: Voraussetzung ist $n^2 + n$ gerade.

$$\begin{aligned} (n+1)^2 + n + 1 &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= \underbrace{n^2 + n}_{\text{gerade n. Vor.}} + 2n + 2 \\ &= n^2 + n + 2(n+1) \end{aligned}$$

Da $n+1 \in \mathbb{N}$ muss $2(n+1)$ durch 2 teilbar sein.

Aufgabe 5

(6 Punkte):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)^{2x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{2x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Aufgabe 6

(7 Punkte)

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$x \cdot A$ lässt sich nicht berechnen,

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$