

Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TML21

M. Oettinger 3.2022

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$f(x) = x \cdot e^{-|x|} = \begin{cases} x \cdot e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \\ x \cdot e^x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Symmetrie: $f(-x) = (-x) \cdot e^{-|-x|} = (-x) \cdot e^{-|x|} = -f(x)$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade.

(b) Stetigkeit in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^x = 0$$

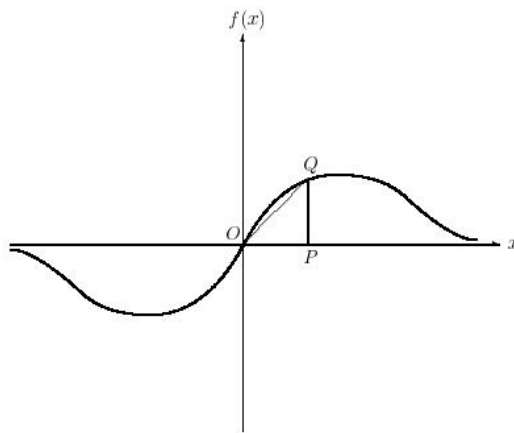
\Rightarrow die Funktion $f(x)$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

(c) Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0^-$$

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)^x}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} \\
 &\implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^x = 1 \cdot 1 = 1
 \end{aligned}$$

b)

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Wenn die Folge gegen g konvergiert, muss für große n gelten:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - (2n+1)}{2 \cdot (2n+1)} \right| = \left| \frac{-1}{4n+2} \right| = \frac{1}{4n+2}$$

Die Folge konvergiert gegen g , wenn

$$\frac{1}{4n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

was für große n und beliebig kleine, aber feste ε erfüllt ist.

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von (beim ersten Besuch mit $n = 1$):

$$S_1 = 10 + \sum_{i=1}^n 10 = 10 + n \cdot 10,$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^n 0,5 \cdot i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 10 + n \cdot 10 \\ n^2 + n &> 40 + 40n \\ n^2 - 39n - 40 &> 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadrat. Gleichung lauten $n_1 = -1$ und $n_2 = 40$, Arno gewinnt also nach insgesamt 41 Besuchen (die negative Lösung kann natürlich verworfen werden, weil die Summen nur positive Indizes liefern - oder anschaulich, weil eine negative Zahl von Besuchen nicht möglich ist).

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ \Rightarrow e^{ix} &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \dots \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + i \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + -i \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ &\quad + i \left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right) \end{aligned}$$

Mit der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ergibt sich

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

Aufgabe 5

a) Aus der Geradengleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}3 + 3t &= x_1 \\ -1 - t &= x_2 \\ -1 - t &= x_3,\end{aligned}$$

setzt man die Werte für x_1, x_2 und x_3 in die Ebenengleichung ein, so folgt

$$\begin{aligned}2(3 + 3t) + 4(-1 - t) + 3(-1 - t) &= 6 + 6t - 4 - 4t - 3 - 3t \\ &= -1 - t = 1 \\ \Rightarrow t &= -2.\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt \vec{P} ergibt sich durch einsetzen des gefundenen Wertes in die Geradengleichung:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die x_2 -Achse kann durch den Einheitsvektor \vec{e}_{x_2} ausgedrückt werden:

$$x_2\text{-Achse: } s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt \vec{Q} ergibt sich durch Gleichsetzen der beiden Geraden:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \\ -3 - 3t = 0 &\Rightarrow t = -1 \\ -1 - t = s &\Rightarrow s = 0 \\ -1 - t = 0 &\text{ ist erfüllt für } t = -1.\end{aligned}$$

Die Gerade g schneidet die x_2 -Achse also in

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(man erkennt im Prinzip direkt an der Geradengleichung, dass sie durch den Ursprung geht).

Aufgabe 6

(15 Punkte)

Die Objekte A und B werden beschrieben durch

$$A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) A ist eine Ebene in Parameterform, B eine Gerade.
b) Die Gerade und die Ebene besitzen gemeinsame Punkte, wenn das LGS $A = B$ eine eindeutige Lösung besitzt

$$\begin{array}{rcccc} 0 & +0 & +t & = & 3 & -\lambda \\ 0 & +s & +0 & = & 2 & -\lambda \\ 1 & -s & -t & = & 1 & +0 \end{array}$$

Die Lösung des LGS lautet $s = -\frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{5}{2}$. Es existiert eine eindeutige Lösung, also schneidet die Gerade B die Ebene A , der Schnittpunkt ist

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c) Die Spiegelung wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} S \cdot P &= Q \\ &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das LGS ist genau dann erfüllt, wenn $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = -1$ und alle weiteren Koeffizienten verschwinden. Die Matrix S ist also

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} 0, \bar{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\ &= 9 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} - 1 \right) \text{ zusätzlicher Summand wg. } k = 0, \end{aligned}$$

bei der Summe handelt es sich um die geometrischen Reihe, die gegen den Wert

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert, da } |q| < 1. \\ \Rightarrow 0, \bar{9} &= 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1 \right) = 9 \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9} \right) = \frac{9}{9} = 1. \end{aligned}$$