Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM21

12.2022

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$:

$$\begin{aligned}\int 2x^2 \cdot e^x dx &= 2x^2e^x - \int 4xe^x dx \\ &= 2x^2e^x - \left[4xe^x - \int 4e^x dx\right] \\ &= 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x + C = (2x^2 - 4x + 4)e^x + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x) \cdot \tan(x) dx &= \int \cos^2(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \cos(x)\sin(x) dx \\ &= \int u \cdot \cos(x) \frac{du}{\cos(x)} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

(c) $\int 2xe^{x^2}dx$: Substitution $u(x) = x^2$, also

$$\frac{du(x)}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int 2xe^u \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C$$

Rücksubstitution:

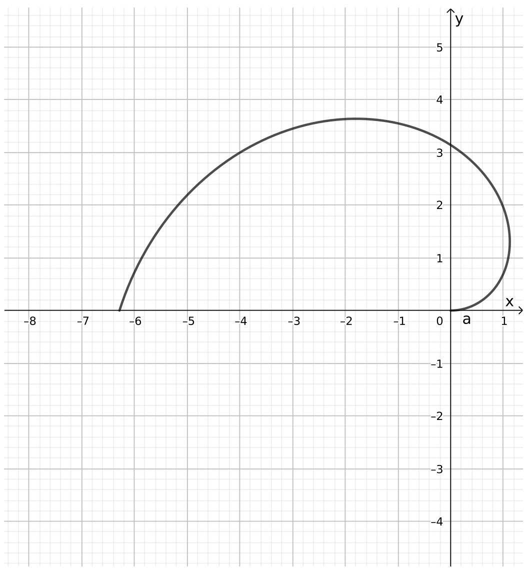
$$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$f: 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2 \cdot \varphi$$

gegebenen Figur handelt es sich um die erste halbe Umdrehung einer archimedeschen Spirale.



Berechnung der Fläche in Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned}
A = \iint dA &= \int_{r=0}^{2\varphi} \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{4\varphi^2}{2} d\varphi \\
&= 2\left[\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x} + 5xe^{3x}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

a) durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: die zugehörige homogene DGL

$$y_0' + 2y_0 = 0$$

kann durch Separation gelöst werden:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_0}{dx} &= -2y_0 \\
\int \frac{dy_0}{y_0} &= -2\int dx \\
\ln|y_0| &= -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = Ce^{-2x}
\end{aligned}$$

Ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= (a + bx)e^{3x} \\
y_p'(x) &= be^{3x} + (a + bx)e^{3x} \cdot 3 \\
y_p'(x) + 2y_p(x) &= be^{3x} + 3(a + bx)e^{3x} + 2(a + bx)e^{3x} \\
&= (b + 5a)e^{3x} + 5bxe^{3x} = e^{3x} + 5xe^{3x} \\
&\Rightarrow \quad 5bxe^{3x} = 5xe^{3x} \quad \Rightarrow \quad b = 1 \\
&\Rightarrow \quad (b + 5a)e^{3x} = 1 \cdot e^{3x} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \\
y_p(x) &= (a + bx)e^{3x} = (0 + 1 \cdot x)e^{3x} = xe^{3x}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y_0 + y_p = Ce^{-2x} + xe^{3x}, \\
\text{mit } y(0) &= C \cdot 1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \\
&\Rightarrow y(x) = xe^{3x}
\end{aligned}
$$

b) über die Laplace-Transformation (mit $y(0) = 0$) und

$$
e^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}; \qquad xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}
$$

kann die DGL transformiert werden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'(x)\} + 2\mathcal{L}\{y(x)\} &= \mathcal{L}\{e^{3x}\} + 5\mathcal{L}\{xe^{3x}\} \\
sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-3} + 5 \cdot \frac{1}{(s-3)^2} = \frac{s-3+5}{(s-3)^2} \\
Y(s)(s+2) &= \frac{1}{(s-3)^2}(s+2) \\
Y(s) &= \frac{1}{(s-3)^2}
\end{aligned}
$$

Die Lösung lässt sich durch Rücktransformation mit Hilfe der Korrespondenz $xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$ jetzt sofort angeben

$$
y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = xe^{3x}
$$

Aufgabe 4

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\
12b &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \dots \\
&\Rightarrow 12b = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 24b \\
&\Rightarrow a_n = 0 \;\; \forall n > 0; \;\; b_n = 0.
\end{aligned}
$$

Alternativ findet man die Koeffizienten über die Integrationen

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 12b\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = 12b\frac{2\pi}{\pi} = 24b$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 12b\cos(nx)dx = \frac{12b}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 12b\sin(nx)dx = \frac{12b}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0$$

Aufgabe 5

Die zugehörige homogene DGL

$$\dot{I}_0 + \frac{R}{L}I_0 = 0$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\dot{I}_0 = -\frac{R}{L}I(t) \Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} = -\int \frac{R}{L}dt$$
$$\ln|I_0| = -\frac{R}{L}t + \ln|C|$$
$$I_0(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Die Lösung der inhomogenen DGL über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, also wählen wir als Ansatz

$$I_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0$$

in die DGL eingesetzt

$$0 + \frac{R}{L}A = \frac{U_0}{L}$$
$$I_p(t) = A = \frac{U_0}{R}$$
$$I(t) = I_0(t) + I_p(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Aufgabe 6

Die Differentialgleichung

$$y' = e^{x-y}$$

ist eine nichtlineare, homogene, gewöhnliche DGL 1. Ordnung. Ihre allgemeine Lösung kann durch Separation der Variablen gefunden werden:

$$\begin{aligned}
y' = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} & \qquad \text{separable DGL} \\
\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{-y} \qquad \Leftrightarrow & \qquad \int e^y dy = \int e^x dx \\
e^y = e^x + C \qquad \Leftrightarrow & \qquad y(x) = \ln |e^x + C|
\end{aligned}$$