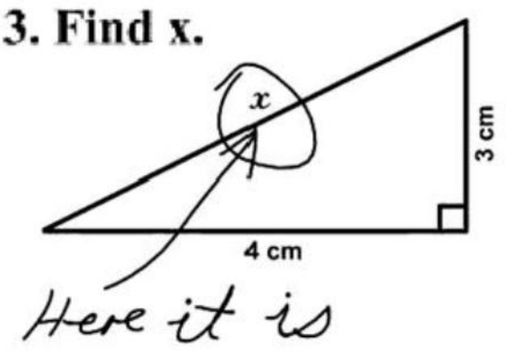
Übungsklausur Mathematik III

Oettinger 2021

Zeit: 90Min.



<u>Hilfsformeln</u>

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Laplace-Transformierte

$$e^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}; \qquad xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Integrale

a)

$$\int \frac{\cos(\frac{2}{x})}{x^2} dx$$

b)

$$\int \frac{4}{x^2 - 4} dx$$

c)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x \sin(3x^2) dx$$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch die Beziehung

$$f : 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2 \cdot \varphi$$

gegebene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und f. Um was für eine Figur handelt es sich?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x} + 5xe^{3x}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

a) durch Aufsuchen einer partikulären Lösung

b) über eine Laplace-Transformation.

Aufgabe 4

Enwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 2 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

mit ihrer 2π-periodischen Fortsetzung in eine Fourier-Reihe.

Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

durch Berechnung der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und Variation der Konstanten.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x + ct) = (x + ct)^2$$

(c = const.) eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{dx^2} f(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = 0$$

ist. Ist die Funktion

$$f(x - ct) = (x - ct)^2$$

ebenfalls eine Lösung (mit Begründung)? Wie verhält es sich mit der Funktion

$$f(x + ct) = (x + ct)^3 \text{ ?}$$