

### Aufgabe 1

Berechnen Sie die Integrale (10 Punkte)

a)

$$\int e^x(1+x)dx$$

b)

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx$$

c)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x \sin(3x^2)dx$$

### Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt über ein Doppelintegral.

(6 Punkte)

### Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \quad x > 0$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = x \ln x$ , ( $x > 0$ ) eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) Ist die Funktion  $f(x) = -\frac{1}{x}$  ebenfalls eine Lösung?

(6 Punkte)

#### Aufgabe 4

Finden Sie alle Lösungen der DGL

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)}.$$

(5 Punkte)

#### Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) - 3 \cdot y(x) = 2x - 3 ; y(0) = \frac{1}{3}.$$

Um was für eine DGL handelt es sich? Existieren neben der gefundenen noch weitere Lösungen? (8 Punkte)

#### Aufgabe 6

(a) Klassifizieren Sie die beiden Differentialgleichungen

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$F(y'', \sin(y), 2x) = 0 \tag{2}$$

(linear/nicht-linear, homogen, Ordnung?)

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$F(y'', \sin(y), 2x) = 0 \quad y(0) = -127; y'(0) = 22?$$

(6 Punkte)

### Aufgabe 7

Die Funktion  $f(x) = 12b$  kann wegen  $f(x) = f(x + 2\pi) \forall x \in \mathbb{R}$  als  $2\pi$ -periodisch betrachtet werden, sie genügt außerdem den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourierreihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ .  
(6 Punkte)

### Aufgabe 8

Alice kreuzt mit ihrer Privatrakete durchs All. Die Rakete hat hübsche pinkfarbene Streifen und besitzt einen neuartigen Antrieb, der sie mit konstanter Beschleunigung antreibt, ohne die Masse  $m$  des Raumschiffs zu verändern. Alice startet bei  $t = 0$  am Ort  $z = 0$  mit einer konstanten Beschleunigung in  $z$ -Richtung, die Rakete hat zur Zeit  $t = 0$  bereits eine Startgeschwindigkeit  $v = 1$  in Richtung  $z$ . Sie befindet sich bereits tief im All und spürt keine Gravitation anderer Himmelskörper.

- (a) Wie sieht die Differentialgleichung zur Bestimmung der Bahn  $z(t)$  aus, wenn man annimmt, dass die Masse des Raumschiffs konstant bleibt?
- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Bahnkurve  $z(t)$  des Raumschiffs unter den gegebenen Randbedingungen.

(8 Punkte)