Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM20

M. Oettinger 2021

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

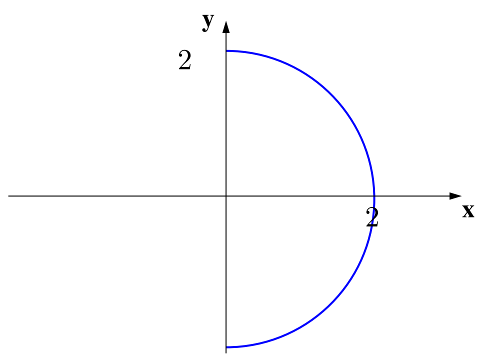

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$(A): \qquad x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

$$\iint\limits_{(A)} x dA = \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot \cos(\varphi) r dr d\varphi = [\sin(\varphi)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^2 dr$$
$$= (1-(-1)) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2

(10 Punkte) Berechnung von Integralen:

a) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^{\pi} (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^{\pi} (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^{\pi} (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^{\pi} 1 dx = [x]_0^{\pi} = \pi$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x \sin(3x^2) dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x \sin(3x^2) dx &= \int_{u=0}^{u=\sqrt{\pi/3}^2} 2x \sin(3u) \frac{du}{2x} \\ &= \int_0^{\pi/3} \sin(3u) du = \frac{1}{3} \left[-\cos(3u)\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

c) Partielle Integration mit $u = x^2$ und $v' = \sin(2x)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx &= -\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\cos(\pi) - 0 + \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx \\ &= \left[x^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(2x) dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 0 + \int_0^{\pi/2} x \cos(2x) dx\end{aligned}$$

(partielle Integration mit $u = x$ und $v' = \cos(2x)$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{8} + \left[\frac{x}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)dx \\
&= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2x)dx \\
&= \frac{\pi^2}{8} - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}(\cos(\pi) - \cos(0)) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\pi^2 - 4}{8}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(7 Punkte)

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)}$$

ist eine (gewöhnliche) nichtlineare homogene DGL 1. Ordnung, sie hat die Form

$$y'(x) + f(x)y(x) = 0$$

und ist damit separabel. Lösung über Separation der Variablen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{2x}{\cos(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(y)dy = 2xdx \\ \int \cos(y)dy &= \int 2xdx \\ \sin(y) &= \frac{2}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \arcsin\left(x^2 + C\right) \end{aligned}$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 5

Differentialgleichung (6 Punkte)

(a) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung

(b)

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

$f(x) = x\ln x$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

$$y = x\ln x \Longrightarrow y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Longrightarrow y'' = \frac{1}{x}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x\ln x = 0$$

(c)

$$f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2}, f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

einsetzen in die Gleichung liefert

$$-x^2\frac{2}{x^3} - x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \neq 0$$

$f(x)$ ist keine Lösung.

Aufgabe 6

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_2 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$ mit periodischer Fortsetzung (10 Punkte):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\sin(2x)dx - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2}\sin(2x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin(2x)dx = 0 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x\sin(2x)dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{(-\cos(2x))}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(-\cos(2x))}{2}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{(-\cos(2x))}{2}\right]_0^{2\pi} - 0 = \frac{1}{2\pi}2\pi\frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(9 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}N(t) + \lambda N(t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}N(t) &= -\lambda N(t) \\
\frac{dN(t)}{N(t)} &= -\lambda dt \\
\ln(|N(t)|) &= -\lambda t + \ln(|C|) \\
N(t) &= C \cdot e^{-\lambda t} \\
N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{N(t)\} = F(s)$$

und der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{\dot{N}(t)\} = s\mathcal{L}\{N(t)\} - N(0)$$

und der Randbedingung $N(0) = N_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$
\begin{aligned}
sF(s) - N_0 + \lambda F(s) &= 0 \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{N_0}{s+\lambda} \\
N(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = N_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$