Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM19

12.2020

Aufgabe 1

(a) Substitution mit $u = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{x^2}{2}du$

$$\int \frac{\cos(\frac{2}{x})}{x^2}dx = -\int \frac{\cos(u)}{x^2}\frac{x^2}{2}du$$
$$= -\frac{1}{2}\int \cos(u)du = -\frac{1}{2}\sin(u) + C$$

Rücksubstitution:

$$\int \frac{\cos(\frac{2}{x})}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{x}) + C$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$
$$\Rightarrow \ (A+B)$$
$$cdotx = 0 \ \Rightarrow \ A = -B$$
$$\Rightarrow \ 2A - 2B = 4A = 4 \ \Rightarrow \ A = 1 \ ; \ B = -1$$
$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

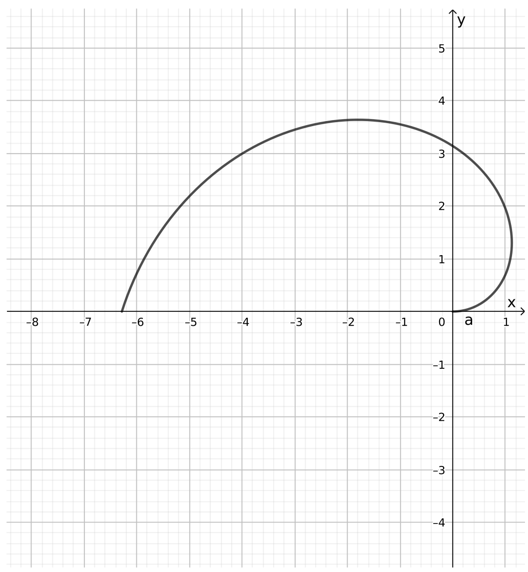
$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx = \int_{u=0}^{u=3\cdot\sqrt{\pi/3}^2} 2x\sin(u)\frac{du}{2x}$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin(u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$f: 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2\cdot\varphi$$

gegebenen Figur handelt es sich um die erste halbe Umdrehung einer archimedeschen Spirale.



Berechnung der Fläche in Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$A = \iint dA = \int_{r=0}^{2\varphi}\int_{\varphi=0}^{\pi} r\,dr\,d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi}\frac{4\varphi^2}{2}d\varphi$$
$$= 2\left[\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^3$$

Aufgabe 3

Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2y(x) = e^{2x} + 4xe^{2x}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$

a) durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: die zugehörige homogene DGL

$$y_0' + 2y_0 = 0$$

kann durch Separation gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= -2y_0 \\ \int \frac{dy_0}{y_0} &= -2 \int dx \\ \ln|y_0| &= -2x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Ein geeigneter Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= (a + bx)e^{2x} \\ y_p'(x) &= be^{2x} + (a + bx)e^{2x} \cdot 2 \\ y_p'(x) + 2y_p(x) &= be^{2x} + 2(a + bx)e^{2x} + 2(a + bx)e^{2x} \\ &= (b + 4a)e^{2x} + 4bxe^{2x} = e^{2x} + 4xe^{2x} \\ &\Rightarrow \quad 4bxe^{2x} = 4xe^{2x} \quad \Rightarrow \quad b = 1 \\ &\Rightarrow \quad (b + 4a)e^{2x} = 1 \cdot e^{2x} \quad \Rightarrow \quad a = 0 \\ y_p(x) &= (a + bx)e^{2x} = (0 + 1 \cdot x)e^{2x} = xe^{2x} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$y(x) = y_0 + y_p = Ce^{-2x} + xe^{2x},$ mit $y(0) \; = C \cdot 1 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$
$\Rightarrow y(x) = xe^{2x}$

b) über die Laplace-Transformation (mit $y(0) = 0$) und

$$e^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}; \qquad xe^{ax} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s-a)^2}$$

kann die DGL transformiert werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'(x)\} + 2\mathcal{L}\{y(x)\} &= \mathcal{L}\{e^{2x}\} + 4\mathcal{L}\{xe^{2x}\} \\
sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \frac{1}{s-2} + 4 \cdot \frac{1}{(s-2)^2} = \frac{s-2+4}{(s-2)^2} \\
Y(s)(s+2) &= \frac{1}{(s-2)^2}(s+2) \\
Y(s) &= \frac{1}{(s-2)^2}
\end{aligned}$$

Die Lösung lässt sich durch Rücktransformation jetzt sofort angeben

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = xe^{2x}$$

Aufgabe 4

Enwicklung von

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } -\pi \le x < 0 \\ 2 & \text{für } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

mit ihrer 2π-periodischen Fortsetzung in eine Fourier-Reihe: die Funktion ist gerade ($f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in [-\pi, \pi]$), also ist $a_0 = 0; a_n = 0$. Berechnung der b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\sin(nx)dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\cos(0) - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(0)\right) \\
&(\text{ mit } \cos(0) = 1) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(2 - \underbrace{2\cos(n\pi)}_{=-2 \text{ für ungerade } n, 2 \text{ für gerade } n}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{für ungerade } n \\ 0 & \text{für gerade } n \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

ist also mit dem neuen Index k und $(2k-1)$ für die ungeraden Glieder

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x)$$

Aufgabe 5

Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$\begin{aligned} y_0' + y &= 0 \\ y_0 &= C \cdot e^{-\int 1dx} = C \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

i) Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} \\ y'(x) &= C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} y' + y = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} &= 2x + 5 \\ \Rightarrow \quad C'(x)e^{-x} &= 2x + 5 \\ \Rightarrow \quad C'(x) &= e^{x}(2x + 5) \end{aligned}$$

Integration (partiell) liefert die Funktion $C(X)$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{x}(2x+5)dx = e^{x}(2x+5) - \int e^{x} 2dx \\ &= e^{x}(2x+5) - 2e^{x} + C = e^{x}(2x+3) + C. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} = (e^{x}(2x+3) + C) \cdot e^{-x} \\ &= C \cdot e^{-x} + 2x + 3. \end{aligned}$$

ii) Lösung der inhomogenen DGL durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: Ansatz ist $y_p(x) = ax + b, y'_p(x) = a$. Eingesetzt in die DGL:

$$\begin{aligned} y'_p + y_p &= a + ax + b = 2x + 5 \\ &\Rightarrow \quad a = 2, b = 3 \\ y_p(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + 2x + 3$.

Aufgabe 6

a) $f(x) = \cos(x+1)$ ist ein um den Betrag 1 nach links verschobener Kosinus und damit 2π-periodisch.

b) $f(x) = x \cdot \cos(5x)$ ist nicht periodisch, da für kein $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $x \cdot \cos(x) = (x + L) \cdot \cos(x + L)$ gilt.

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 1 - 2 = -1$ (mit dem Adiitionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$). Die Funktion $f(x) = -1$ kann natürlich als periodisch angesehen werden, das Periodenintervall ist jedes beliebige $x \in \mathbb{R}$.