

# Musterlösung zur Nachklausur Mathematik III TMM19

04.2021

## Aufgabe 1

(a) Substitution  $u = x^2$ :

$$\begin{aligned}u = x^2 &\Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ \int x \cdot e^{x^2} dx &= \int x \cdot e^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C.\end{aligned}$$

$$\text{Rücksubstitution: } \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

(b) partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(2x) dx &= \frac{x^2}{2} (-\cos(2x)) - \int 2x \frac{1}{2} (-\cos(2x)) dx \\ &= \frac{x^2}{2} (-\cos(2x)) + \frac{1}{2} \sin(2x) - \int 1 \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin(2x) - \cos(2x) - \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) \right] + C \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right] + C\end{aligned}$$

(c) mit der Stammfunktion oben:

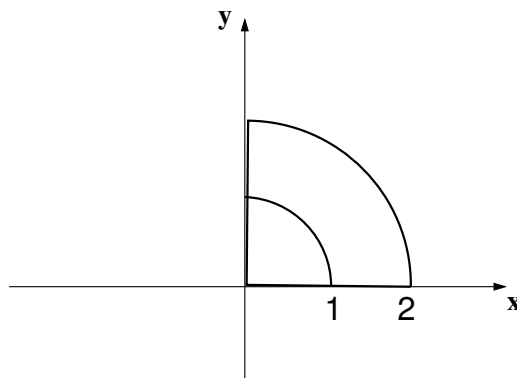
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2x) dx &= \frac{1}{2} \left[ \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1 \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Bei der durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreisring mit den Radien  $R_1 = 1$  und  $R_2 = 2$ :



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned}A &= \iint dA = \int_{r=1}^2 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r dr d\varphi \\ &= \int_{r=1}^2 [\varphi]_0^{\pi/2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r dr = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$xy' + 2y = x^2 - x + 1$$

- (a) Die Funktion  $y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  ist eine Lösung, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y'(x) = \frac{2x}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2C}{x^3}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} xy' + 2y &= x \left( \frac{2x}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2C}{x^3} \right) + 2 \left( \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{x^2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} - \frac{2x}{3} - \frac{2C}{x^2} + \frac{2C}{x^2} + \frac{2}{2} \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

- (b) Die DGL kann in zwei Schritten gelöst werden:

- Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung  $xy'_0 + 2y_0 = 0$  durch Separation der Variablen.
- Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten oder Aufsuchen einer partikulären Lösung.

#### Aufgabe 4

Lösung über Separation der Variablen:

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)} \iff \cos(y)dy = 2xdx$$

$$\int \cos(y)dy = \int 2xdx$$

$$\sin(y) = \frac{2}{2}x^2 + C \Rightarrow y(x) = \arcsin(x^2 + C)$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

#### Aufgabe 5

Anfangswertproblem:

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad y \rightarrow -1 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung  $2xy' - y = 0$  kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx}$$

$$= Ce^{\frac{1}{2} \ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

$$\text{Ansatz: } y = C(x)\sqrt{x},$$

$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung  $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$  ergibt sich

$$2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2xC'(x)\sqrt{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{3}{2}} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters  $K$ ):  $y \rightarrow -1$  für  $x \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty \implies -1 + K\sqrt{x} \rightarrow -1 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$\implies K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

### Aufgabe 6

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \quad (1)$$

$$y'' = 4x \quad (2)$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	-
inhomogen	X	X
Ordnung	1	2

### Aufgabe 7

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$$

$$12b = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x) + \dots$$

$$\Rightarrow 12b = \frac{a_0}{2} \Leftrightarrow a_0 = 24b$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \forall n > 0; \quad b_n = 0.$$

### Aufgabe 8

Das Elektron der Masse  $m$  im elektrischen Feld  $E = \text{const}$  erfährt die Kraft  $q \cdot E$ , es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \Leftrightarrow q \cdot E = m \ddot{z}(t)$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt  $t = 0$  geschieht über die Heaviside-Funktion

$$H : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, t \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0 \\ 1 & \text{falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{qE}{m} H(t) = 0.$$

oder für  $t > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{qE}{m} = 0.$$

(b) Lösung der DGL in zwei Schritten:

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} = K$$

$$\int \ddot{z} dt = \int K dt \Rightarrow \dot{z} = K \cdot t + C$$

$$\text{mit } \dot{z}(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\int \dot{z} dt = K \int t dt \Rightarrow z(t) = K \frac{t^2}{2} + C$$

$$\text{mit } z(t=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow z(t) = K \frac{t^2}{2} = \frac{qE}{2m} t^2$$