Musterlösung zur Nachklausur Mathematik 2 TMM18

M. Oettinger 2019

Aufgabe 1

(9 Punkte)
Der feste Umfang des Rechtecks ist

$$U = 2(a+b) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{U}{2} - b$$

Die Fläche des Rechtecks ist eine Funktion der Variablen b

$$\begin{aligned} A = a \cdot b &= \left(\frac{U}{2} - b\right) b = A(b) \\ \frac{d}{db} A(b) &= \frac{U}{2} - 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{U}{4} \\ \Rightarrow a &= \frac{U}{2} - b = \frac{U}{4} \\ \frac{d^2}{db^2} A(b) &= -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum!} \end{aligned}$$

Die Lösung ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $U/4$. Die Rechnung für die kleinste Fläche funktioniert nicht, da der kleinste Flächenwert (für $b = 0$) am Rand des Definitionsbereichs der Funktion $A(b)$ liegt - der niedrigste Wert wird nicht als Minimum erkannt, da die Funktion auch für negative b Werte liefert (die allerdings nicht sinnvoll als Maß für die Fläche des Rechtecks sind).

Aufgabe 2

(10 Punkte)
Alle gegebenen Funktionen sind ableitbar.

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} \\
f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2)}{(x+1)^4} \\
&= \frac{(x+1)[2x(x+1) - 2(x^2+2)]}{(x+1)\cdot(x+1)^3} \\
&= \frac{2x^2+2x-2x^2-4}{(x+1)^3} \\
&= \frac{2x-4}{(x+1)^3}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 12e^x \\
f'(x) &= 12\cdot(e^x)' = 12e^x
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{12x} \\
f'(x) &= e^{12x}\cdot 12 = 12e^{12x}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{12\cdot\sin(x)} \\
f'(x) &= e^{12\cdot\sin(x)}\cdot 12\cdot\cos(x) = 12\cos(x)\cdot e^{12\cdot\sin(x)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

(14 Punkte)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x - 3x^3 \\
f'(x) &= 4 - 3\cdot 3x^2 = 4 - 9x^2 \\
f''(x) &= -9\cdot 2x = -18x \\
f^{(3)}(x) &= -18
\end{aligned}
$$

Nullstellen:

$$f(x) = 4x - 3x^3 = x(4 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$
$$4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Extrema:

$$f'(x) = 4 - 9x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$$
$$f(\frac{2}{3}) = \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{8}{27} = \frac{48}{27} \approx 1,78$$
$$f''(\frac{2}{3}) = -18 \cdot \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow \text{ (lokales) Maximum bei } (\frac{2}{3}; \frac{48}{27})$$
$$f(-\frac{2}{3}) = -\frac{8}{3} + 3 \cdot \frac{8}{27} = -\frac{48}{27} \approx -1,78$$
$$f''(-\frac{2}{3}) = -18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) > 0 \Rightarrow \text{ (lokales) Minimum bei } (-\frac{2}{3}; -\frac{48}{27})$$

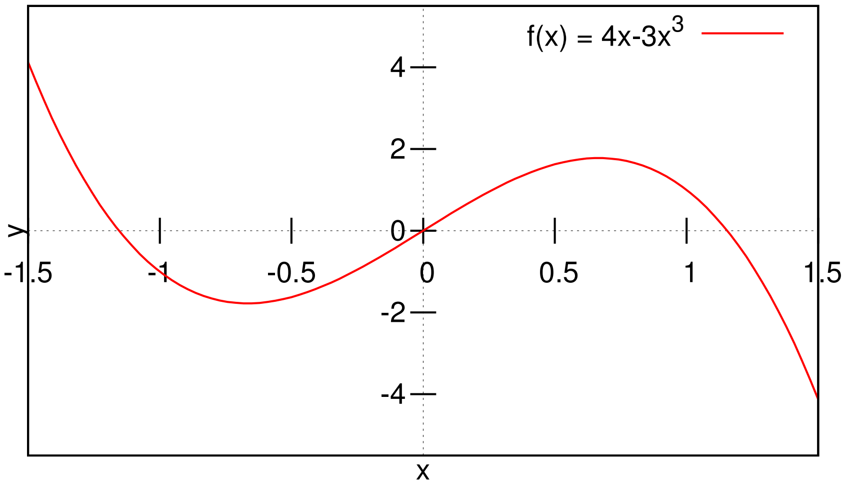
Wendestellen:

$$f''(x) = -9 \cdot 2x = -18x = 0$$
$$\Rightarrow x_0 = 0$$
$$f^{(3)}(x) = -18 \neq 0 \Rightarrow \text{ Wendepunkt } (0; 0)$$

Asymptoten: keine.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 4x - 3x^3 = 3 \cdot \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x - 3x^3 = 3 \cdot \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$

Plot der Funktion:



Aufgabe 4

(12 Punkte)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 2x^2 + 1 & \Rightarrow f(1) &= 4\\
f'(x) &= 3x^2 + 4x & \Rightarrow f'(1) &= 7\\
f''(x) &= 6x + 4 & \Rightarrow f''(1) &= 10\\
f^{(3)}(x) &= 6 & \Rightarrow f^{(3)}(1) &= 6\\
f^{(n)}(x) &= 0 \text{ für } n > 3.
\end{aligned}$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

da ab der vierten Ableitung alle weiteren verschwinden, gilt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{4}{0!}(x-1)^0 + \frac{7}{1!}(x-1)^1 + \frac{10}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3.$$

Unter Ausnutzen von $0! = 1$ folgt nach ausmultiplizieren

$$\begin{aligned}
4 + 7(x-1) + 7(x-1) + \frac{10}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3\\
= x^3 + 2x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung ist mit der ursprünglichen analytischen Darstellung identisch (da die Ableitungen einer Potenzreihe wieder eine Potenzreihe ergeben und die Darstellung der Funktion eindeutig ist). Daraus folgt für den Konvergenzradius natürlich, dass er dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ der Funktion entspricht.

Aufgabe 5

(9 Punkte)

a) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

b) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\cos(x)} = 0$$

c) Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$