Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM18

Aufgabe 1

Wenn x, y die Koordinaten des Punktes darstellen, ist die Fläche des Rechtecks

$$A = 2xy$$

oder mit der Kreisgleichung $r^2 = x^2 + y^2$

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Um das Maximum zu finden, kann die erste Ableitung der Funktion $A(x)$

$$\begin{aligned}
A'(x) =& 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) \\
=& 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
=& \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

gleich Null gesetzt werden, also

$$2r^2 - 4x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
A''(x) &= \frac{2(-2)2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2(r^2 - 2x^2)(-\frac{1}{2})(-2x)}{\sqrt{r^2 - x^2}^3} \\
&= \frac{-8x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2x(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}^3} \\
A(\frac{r}{\sqrt{2}}) &= \frac{-8\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} + \frac{2\frac{r}{\sqrt{2}}(r^2 - r^2)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3} = -8 < 0,
\end{aligned}$$

Es handelt sich also um das gesuchte Maximum. Mit dem gefundenen Wert für x kann natürlich auch der y-Wert des Punkts bestimmt werden:

$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \Rightarrow y = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ positiv, da } y >= 0$$

Die Fläche des Rechtecks beträgt dann

$$A = 2xy = 2\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$$

Aufgabe 2

a)

$$A \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$b \cdot A$ lässt sich nicht berechnen,

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Lösungen sind $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{5}{2}$

Aufgabe 3

Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar

$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x+2)$$

b) differenzierbar

$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c) differenzierbar

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

d) differenzierbar

$$(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

e) differenzierbar

$$\left(e^{\cos(2x)}\right)' = e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(x) \cdot e^{\cos(2x)}$$

Aufgabe 4

Nullstellen:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

Erste Lösung (geraten) ist $x_1 = 1$. Durch Partialbruchzerlegung ergeben sich die beiden weiteren Lösungen:

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 4x^2 \qquad\quad + 3\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 3x - 3 \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad -\,3x^2 \\
\qquad \underline{\;\;3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad -\,3x + 3 \\
\qquad\qquad \underline{\;\;\;3x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow& \\
x_{2/3} =& \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.
\end{aligned}$$

Extrema: benötigt werden die 1. und 2. Ableitung:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 8x = x(3x - 8) = 0 \\
x_1 &= 0; x_2 = \frac{8}{3}. \\
f''(x) &= 6x - 8 \\
f''(0) &= -8 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum mit } f(0) = 3, \\
f''(\frac{8}{3}) &= 8 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum mit } f(\frac{8}{3}) = \frac{512 - 768 + 81}{27} = -\frac{175}{27}.
\end{aligned}$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}, f^{(3)}(x) = 6 \neq 0.$$

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 4x^2 + 3 = \infty(\text{ höchster Grad des Polynoms überwiegt})$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 4x^2 + 3 = -\infty(\text{ höchster Grad des Polynoms überwiegt})$$

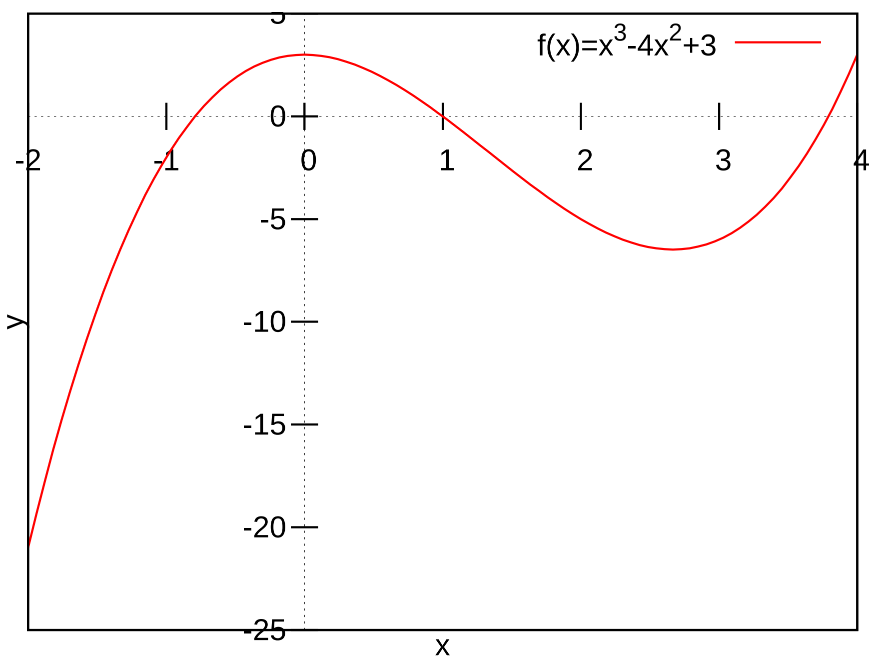

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ im Intervall $[-2; 4]$.

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 = 3x^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(8 Punkte)
Die Tangente ist

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x_0) &= \frac{1^2}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

die erste Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{2x + 2 - (x^2 + 2x + 1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1}{(x-2)^2}, \\ &\Rightarrow f'(x_0 = 0) = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Damit ist die Tangentengleichung

$$t(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x - 0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

Wegen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

ist die Tangentengleichung natürlich genau das MacLaurin-Polynom bis $n = 1$.