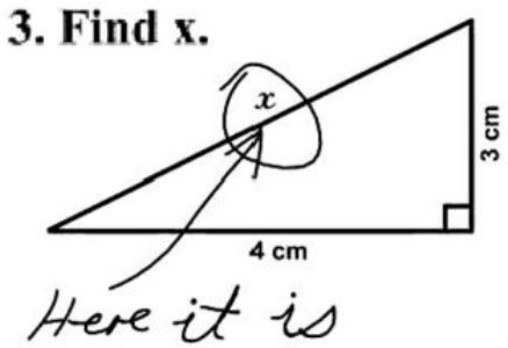
Übungsklausur Mathematik III

Oettinger 2019

Zeit: 90Min.



<u>Hilfsformeln</u>
Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Laplace-Transformierte

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Integrale

a)
$$\int_{-2}^{2} e^x(\cos^2(x) + \sin^2(x))dx$$

b)
$$\int \frac{4}{x^2 - 4} dx$$

c)
$$\int \sin(x)e^{-\cos(x)}dx$$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch die Beziehung

$$f : 0 \leq \varphi \leq \pi \quad ; r = 2 \cdot \varphi$$

gegebene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und f. Um was für eine Figur handelt es sich?

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = (x + C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{2}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) Wie nennt man die Lösung in a), wie die Lösung in b)?

Aufgabe 4

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) + y(t) = 0 \quad y(0) = 5$$

a) über eine Laplace-Transformation der DGL

b) ohne Laplace-Transformation.

c) Was ist der Vorteil der ersten Variante?

Aufgabe 5

Von welchem Typ ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y(x)' = -y(x) + 2x + 5?$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$.

Aufgabe 6

Die Funktion $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ ist 2π-periodisch, denn $f(x) = f(x + 2\pi)$. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

entwickelt werden. Führen Sie die Entwicklung durch und geben Sie die Fourier-Reihe an.

Aufgabe 7

Alice kreuzt mit ihrer Privatrakete durchs All. Die Rakete hat hübsche pinkfarbene Streifen und besitzt einen neuartigen Antrieb, der sie mit konstanter Beschleunigung antreibt, ohne die Masse m des Raumschiffs zu verändern. Alice startet bei $t = 0$ am Ort $z = 0$ mit einer konstanten Beschleunigung in z-Richtung, die Rakete hat zur Zeit $t = 0$ bereits eine Startgeschwindigkeit $v = 1$ in Richtung z. Sie befindet sich bereits tief im All und spürt keine Gravitation anderer Himmelskörper.

(a) Wie sieht die Differentialgleichung zur Bestimmung der Bahn $z(t)$ aus, wenn man annimmt, dass die Masse des Raumschiffs konstant bleibt?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Bahnkurve $z(t)$ des Raumschiffs unter den gegebenen Randbedingungen.