## Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 2 TMM17

## M. Oettinger 6.2018

**Zeit: 90Min.**

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

## Aufgabe 1

(5 Punkte)
Sei $p$ eine positive reelle Zahl. Welches Rechteck, unter allen Rechtecken mit vorgegebenem Umfang $2p$, hat den größten Flächeninhalt?

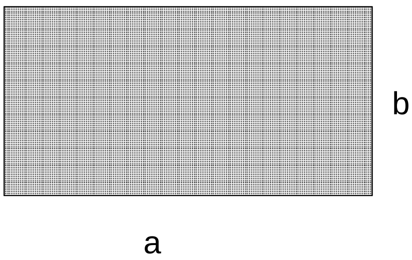


**Abbildung 1:** Rechteck mit Fläche $a \cdot b$ und Umfang $2(a+b)$

Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $a$ und $b$: $F = a \cdot b$. Der Umfang $2(a+b)$ soll genau $2p$ betragen, also

$$2p = 2(a+b) \Rightarrow b = p - a$$

Damit kann die Fläche geschrieben werden als

$$F = F(a) = a \cdot b = a \cdot (p-a) = pa - a^2.$$

Dies ist eine Funktion $F$ mit dem Argument $a$. Ableitung nach $a$ und Nullsetzen liefert

$$F'(a) = p - 2a = 0 \Rightarrow a = p/2 \Rightarrow b = p - a = p/2$$

Die zweite Ableitung ist

$$F''(a) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ es liegt ein Maximum vor.}$$

Die maximale Fläche ergibt sich bei den Seitenlängen $a = p/2$ und $b = p/2$, also einem Quadrat mit Seitenlänge $p/2$.

## Aufgabe 2

(5 punkte)
Zur Näherung wird das MacLaurin-Polynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \sqrt{4+x}$ bestimmt. Benötigt werden

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{4+x} = (4+x)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f(0) = \sqrt{4} = 2 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (4+x)^{-\frac{3}{2}} \\
&\Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4 \cdot 8} = -\frac{1}{32}
\end{aligned}$$

Das Polynom lautet ($0!$ ist als eins definiert):

$$T_2(x) = \frac{1}{0!}f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 = 2 + \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{2}\frac{1}{32}x^2$$

Das Polynom kann als Näherung für die Wurzel benutzt werden, es ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{4,2} &= f(0,2) \approx T_2(0,2) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 - \frac{1}{64}0,2^2 = 2,049375 \\
\sqrt{4,4} &= f(0,4) \approx T_2(0,4) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,4 - \frac{1}{64}0,4^2 = 2,0975
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

(8 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da Verkettung differenzierbarer Funktionen.

$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x+2)$$

b) differenzierbar, da Produkt differenzierbarer Funktionen.

$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c) differenzierbar, sofern die Wurzel als Funktion betrachtet wird (keine negative Lösung).

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

d) differenzierbar für $x > 0$, da definiert und stetig in $\mathbb{R}^+$ (ganz genau: Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion, deren Ableitung nicht Null wird).

$$(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

e) differenzierbar, da Quotient zweier Polynome.

$$f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{2x + 1 + x^2} = \frac{2x(x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^2} = 2x$$
$$f'(x) = (2x)' = 2$$

## Aufgabe 4

(12 Punkte)
Kurvendiskussion:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Der Definitionsbereich ist angegeben: $x \in \mathbb{R}$, der Wertebereich ergibt sich aus den Minima (s.u.): $W = [-6,25; \infty[$. Die benötigten Ableitungen lauten

$$f'(x) = x^3 - 4x$$
$$f''(x) = 3x^2 - 4$$
$$f^{(3)}(x) = 6x$$

Symmetrie: es gilt

$$f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = f(x)$$

Die Funktion ist also gerade (sie enthält nur gerade Potenzen von $x$).

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} &= 0\\
x^4 - 8x^2 - 9 = x^4 - 2\cdot 4x^2 + 16 - 16 - 9 &= (x^2+4)^2 - 25 = 0\\
x^2 + 4 &= \pm\sqrt{25} = \pm 5\\
x^2 &= \pm 1 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1
\end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x^3 - 4x = x(x^2-4) = 0\\
x_3 &= 0\\
x^2 - 4 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{4/5} = \pm 2.\\
f''(0) &= -4 < 0; \quad f(0) = -\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } (0/\frac{9}{4})\\
f''(\pm 2) &= 12 - 4 = 8 > 0\\
f(\pm 2) &= 4 - 8 - \frac{9}{4} = \frac{-16-9}{4} = -\frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Minima bei } (\pm 2/-6,25).
\end{aligned}$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{6/7} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$\begin{aligned}
f^{(3}(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) &= \pm 6\sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0\\
f(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}) &= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\frac{4}{3} - \frac{9}{4} = \frac{4-24}{9} - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}
\end{aligned}$$

Krümmungsverhalten: vor der ersten Wendestelle: z.B. $x = -2 < \sqrt{\frac{4}{3}}$:

$$f''(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{linksgekrümmt,}$$

also ist die Funktion zwischen den Wendepunkten rechtsgekrümmt, nach dem 2. Wendepunkt wieder linksgekrümmt.

Verhalten für große/kleine Werte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} &= \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)\\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \frac{1}{4} = \infty
\end{aligned}$$

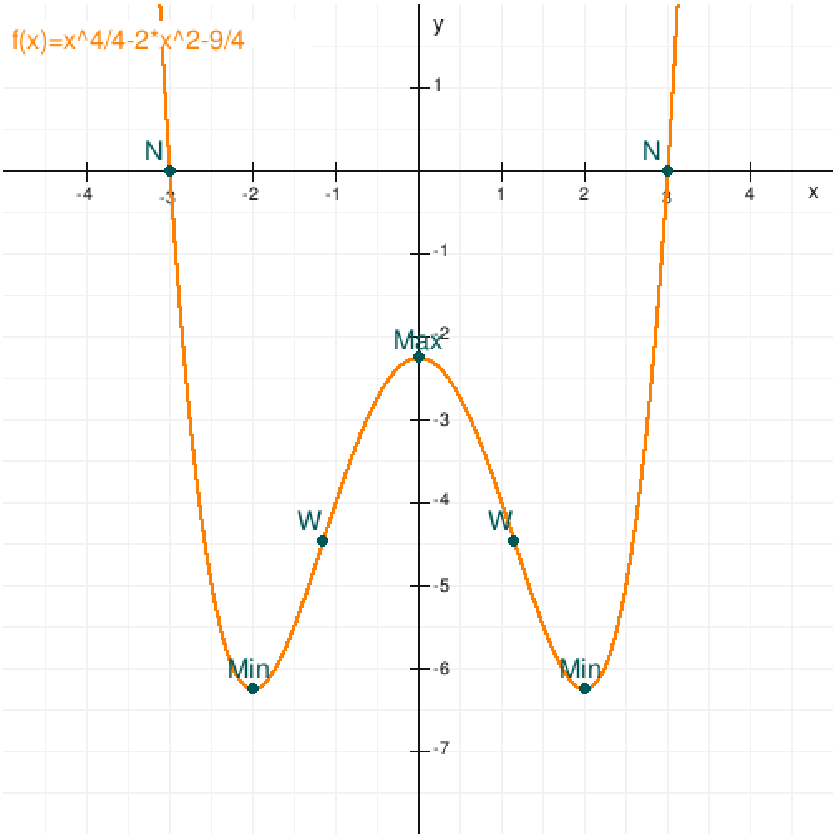


**Abbildung 2:** Skizze der Funktion.

## Aufgabe 5

(10 Punkte)
Taylorpolynom $T_3(x)$ zu $f(x) = e^x \sin x$ um die Stelle $x_0 = 0$: benötigt werden die ersten drei Ableitungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \sin x & \Rightarrow f(0) &= 1 \cdot 0 = 0 \\
f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) & \Rightarrow f'(0) &= 1(0+1) = 1 \\
f''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x & \Rightarrow f''(0) &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \\
f^{(3)}(x) &= 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x) & \Rightarrow f^{(3)}(0) &= 2(1-0) = 2.
\end{aligned}$$

Damit kann das Taylorpolynom nach der Vorschrift

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &= 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

(5 Punkte)
vollständige Induktion: $f(x) = e^x \cdot x$.

$$\text{Beh. } f^{(n)} = f(x) + e^x \cdot n = e^x(x+n)$$

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$f'(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x(x+1)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \underbrace{=}_{\text{n. Vor.}} \ & (e^x(x+n))' \\ &= e^x(x+n) + e^x \cdot 1 \\ &= e^x(x+(n+1)) \end{aligned}$$

## Aufgabe 7

(10 Punkte)
Die Scheinwerfer blenden, wenn sie direkt auf Alice gerichtet sind - in diesem Fall wird die Tangente an die Kurve durch den Punkt A gehen. Für die Tangente wird die erste Ableitung benötigt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \\ f'(x) &= (-2)\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1-x}{2} \\ \Rightarrow \quad t(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ &= -\frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0}{2} + \frac{7}{4} + (x-x_0)\frac{1-x_0}{2} \\ &= \frac{x_0^2}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x_0 x \end{aligned}$$

Die gefundene Tangente muss jetzt durch den Punkt A(-2/2) gehen, also muss $t(-2) = 2$ sein:

$$t(-2) = \frac{x_0^2}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}(-2) - \frac{1}{2}(-2)x_0 = \frac{x_0^2}{4} + x_0 + \frac{7}{4} - 1 = 2$$

$$\frac{x_0^2}{4} + x_0 - \frac{5}{4} = 0$$

$$x_0^2 + 4x_0 - 5 = 0$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung lauten $x_1 = -5$ mit dem Funktionswert $f(-5) = -7$ und $x_2 = 1$i mit $f(1) = 2$. Die PKW blenden Alice also an diesen beiden Punkten.

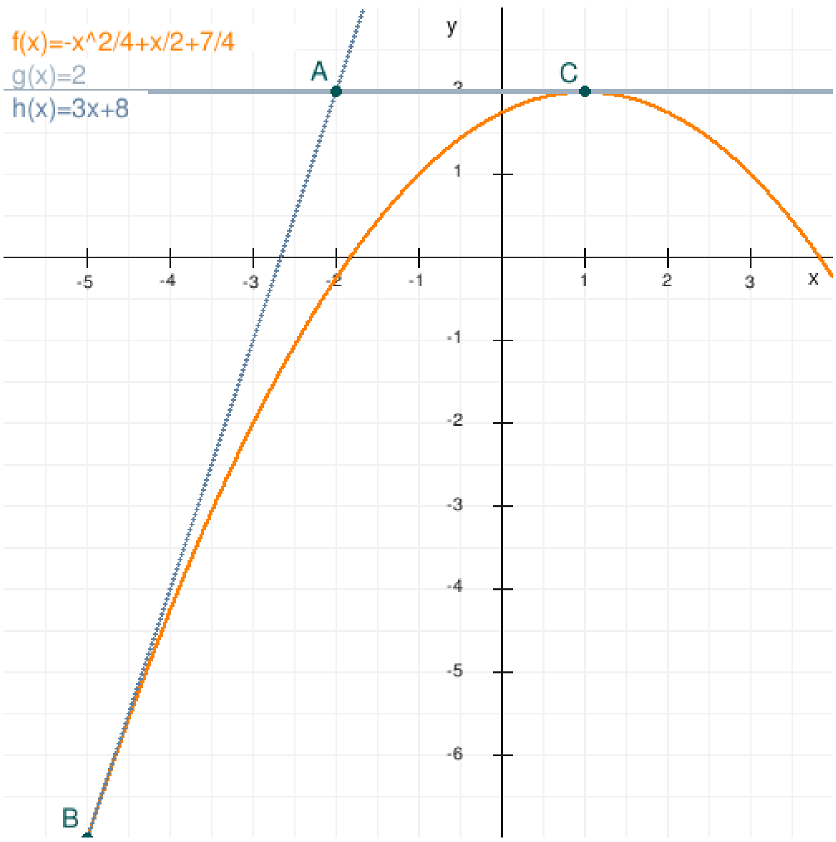


**Abbildung 3:** Zum Problem der armen Alice (in Punkt A), von zwei PKW geblendet...