Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM17

12.2018

Aufgabe 1

(a) Mit dem Additionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\int_{-2}^{2} e^0(\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_{-2}^{2} 1 \cdot 1dx = [x]_{-2}^{2} = 2 - (-2) = 4.$$

(b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{x^2-4}$$
$$\Rightarrow \ (A+B)$$
$$cdotx = 0 \ \Rightarrow \ A = -B$$
$$\Rightarrow \ 2A - 2B = 4A = 4 \ \Rightarrow \ A = 1 \ ; \ B = -1$$
$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$
$$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

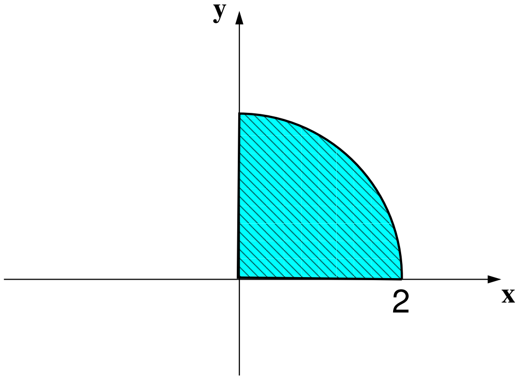
$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx = \int_{u=0}^{u=3\cdot\sqrt{\pi/3}^2} 2x\sin(u)\frac{du}{2x}$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin(u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreis mit Radius $R = 2$:



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned} A &= \iint dA = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r dr d\varphi \\ &= \int_{r=0}^{2} [\varphi]_0^{\pi/2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r dr \qquad = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= (x + C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} &(2x + 2C)^2 - 2x(2x + 2C) - 2(x^2 + 2xC + 2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$y = \frac{x^2}{2}$$
$$y' = \frac{2}{2}x = x$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

Die DGL $\dot{y}(t) + y(t) = 0$ soll unter der Bedingung $y(0) = 5$ gelöst werden

a) über die Laplace-Transformation der DGL (mit $F(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} &= 0\\ s \cdot F(s) - y(0) + F(s) &= 0\\ F(s)(s+1) &= 5\\ F(s) &= \frac{5}{s+1} = 5\frac{1}{s+1}\end{aligned}$$

Rücktransformation: mit $a = 1$ gilt

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = e^{-t}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$5\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = 5e^{-t}$$

b) Lösung über Separation:

$$\dot{y(t)} = -y(t)$$
$$\frac{y}{dy} = -1dx$$
$$\ln(|y(t)| = -t + \ln(|C|)$$
$$y(t) = C \cdot e^{-t}$$

Aus der Bedingung $y(0) = 5$ ergibt sich die Konstante $C = 5$ und damit wieder die Lösung

$$y(t) = 5e^{-t}$$

c) Der Vorteil der Laplace-Transformation ist die Lösung der DGL durch Transformation der Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung, die einfach nach der Bildfunktion der gesuchten Lösung aufgelöst werden kann.

Aufgabe 5

Anfangswertproblem (10 Punkte):

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx}$$
$$= Ce^{\frac{1}{2}\ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

$$\text{Ansatz: } y = C(x)\sqrt{x},$$
$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2xC'(x)\sqrt{x} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} - (-1)\frac{1}{x} + K$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

$$\Longrightarrow K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$F(y'', \sin(y), 2x) = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine nichtlineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingungen werden beide Parameter festgelegt, es bleibt genau eine Lösung.

Aufgabe 7

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\ 12b &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \ldots \\ &\Rightarrow 12b = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 24b \\ &\Rightarrow a_n = 0 \;\; \forall n > 0; \quad b_n = 0. \end{aligned}$$

Alternativ findet man die Koeffizienten über die Integrationen

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = 12b\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = 12b\frac{2\pi}{\pi} = 24b \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 12b\cos(nx)dx = \frac{12b}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 12b\sin(nx)dx = \frac{12b}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)dx = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Das Raumschiff der Masse m erfährt eine Kraft $F = const$, es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \;\Leftrightarrow\; F = m\ddot{z(t)}$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ kann über die Heaviside-Funktion modelliert werden

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, t \to \begin{cases} 0, \text{ falls } t \leq 0 \\ 1 \text{ falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{F}{m} H(t) = 0.$$

oder für $t > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{F}{m} = 0.$$

(b) Lösung der DGL in zwei Schritten:

$$\ddot{z} = \frac{F}{m} = K$$

$$\int \ddot{z} dt = \int K dt \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = K \cdot t + C$$

mit $\dot{z}(t = 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1$

$$\int \dot{z} dt = \int Kt + 1 dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = K \frac{t^2}{2} + 1 \cdot t + C$$

mit $z(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$\Rightarrow z(t) = K \frac{t^2}{2} + t = \frac{F}{2m} t^2 + t$$