Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM17

M. Oettinger 20.12.2018

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (3+4+3 Punkte):

(a) Substitution: mit $u = x^2$, also $dx = du/(2x)$:

$$\int_0^2 3xe^{x^2}dx = \int_{0^2}^{2^2} 3xe^u \frac{du}{2x}$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^4 e^u du = \frac{3}{2}\left[e^u\right]_0^4 = \frac{3}{2}\left(e^4 - e^0\right) = \frac{3}{2}e^4 - \frac{3}{2}$$

(b) Partielle Integration:

$$\int x \cdot \cos(3x)dx = x\frac{\sin(3x)}{3} - \int 1 \cdot \frac{\sin(3x)}{3}dx$$
$$= \frac{x\sin(3x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)\cos(3x)}{3} + C = \frac{3x\sin(3x) + \cos(3x)}{9} + C$$

(c) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 \, dx = \int_0^\pi 1dx = [x]_0^\pi = \pi$$

Aufgabe 2

Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

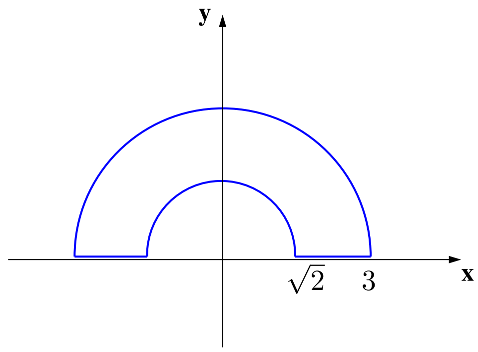

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$A = \iint_{(A)} dA; \quad y \geq 0;\ 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint_{(A)} dA = \int_{r=\sqrt{2}}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int_{r=\sqrt{2}}^{3} \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{3} = \pi \frac{9-2}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Aufgabe 3

(8 Punkte)
Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung, die zugehörige homogene DGL ist

$$y_0' + y = 0$$
$$y_0 = C \cdot e^{-\int 1 dx} = C \cdot e^{-x}$$

Weg 1: Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Ansatz ist der verallgemeinerte Störterm

$$y_p(x) = Ax + B, \quad y'(x) = A$$

in die DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned} A + Ax + B &= 2x + 5 \\ Ax &= 2x \quad \Rightarrow A = 2 \\ A + B &= 5 \quad \Rightarrow B = 3 \\ &\Rightarrow y_p(x) = 2x + 3 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist die Summe

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^{-x} + 2x + 3$$

Weg 2: Lösung der inhomogenen DGL durch Substitution: die DGL ist von der Form $y'(x) = f(ax + by + c)$. Eine geeignete Substitution ist $u = 2x - y + 5$.

$$\begin{aligned} \frac{du(x)}{dx} &= u'(x) = 2 - y'(x) \\ \text{und } y'(x) &= 2x - y + 5 = u(x) \\ &\Rightarrow u'(x) = 2 - u(x) \end{aligned}$$

Die DGL kann jetzt durch Separation gelöst werden

$$\begin{aligned} \frac{du}{2-u} &= dx \\ \frac{du}{u-2} &= -dx \\ \int \frac{1}{u-2} du &= -\int dx \\ \ln(|u-2|) &= -x + ln(|K|) \\ u(x) - 2 &= K \cdot e^{-x} \\ u(x) &= K \cdot e^{-x} + 2 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} u(x) = 2x - y + 5 = K \cdot e^{-x} + 2 \\ \Rightarrow y(x) \qquad &= -u(x) + 2x + 5 = C \cdot e^{-x} + 2x + 3 \end{aligned}$$

(dabei wurde das Vorzeichen am ersten Summand in der Integrationskonstante versteckt!)

Weg 3: Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} \\
y'(x) &= C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$
\begin{aligned}
y' + y = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} &= 2x + 5 \\
\Rightarrow \quad C'(x)e^{-x} &= 2x + 5 \\
\Rightarrow \quad C'(x) &= e^{x}(2x + 5)
\end{aligned}
$$

Integration (partiell) liefert die Funktion $C(X)$

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \int e^{x}(2x + 5)dx = e^{x}(2x + 5) - \int e^{x}2dx \\
&= e^{x}(2x + 5) - 2e^{x} + C = e^{x}(2x + 3) + C.
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} = (e^{x}(2x + 3) + C) \cdot e^{-x} \\
&= C \cdot e^{-x} + 2x + 3.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(8 Punkte)
Die zugehörige homogene DGL

$$
\dot{I} + \frac{R}{L}I = 0
$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_0 = -\frac{R}{L}I(t) \Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} &= -\int \frac{R}{L}dt \\
\ln|I_0| &= -\frac{R}{L}t + \ln|C| \\
I_0(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.
\end{aligned}
$$

Die Lösung der inhomogenen DGL

a) über die Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$I(t) = C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$
$$\dot{I}(t) = \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{L} &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\ &\Rightarrow \quad \dot{C}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \\ &\Rightarrow C(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{U_0}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C \\ I(t) = C(t)I_0(t) &= \left(\frac{U_0}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

b) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, also wählen wir als Ansatz

$$I_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0$$

in die DGL eingesetzt

$$0 + \frac{R}{L}A = \frac{U_0}{L}$$
$$I_p(t) = A = \frac{U_0}{R} I(t) = I_0(t) + I_p(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Aufgabe 5

Differentialgleichungen (4 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$
$$y^{(3)} + yx^3 = 4y \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	X
inhomogen	X	-
Ordnung	1	3

Wieviele Lösungen besitzen die beiden Differentialgleichungen? Unendlich viele!

Aufgabe 6

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_2 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$ mit periodischer Fortsetzung (9 Punkte):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2} \sin(2x) dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2} \sin(2x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin(2x) dx = 0 - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} x \sin(2x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left[x \frac{(-\cos(2x))}{2} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-\cos(2x))}{2} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left[x \frac{(-\cos(2x))}{2} \right]_0^{2\pi} - 0 = \frac{1}{2\pi} 2\pi \frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{\cos(4\pi)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

(9 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}N(t) + \lambda N(t) &= 0 \\
\frac{d}{dt}N(t) &= -\lambda N(t) \\
\frac{dN(t)}{N(t)} &= -\lambda dt \\
\ln(|N(t)|) &= -\lambda t + \ln(|C|) \\
N(t) &= C \cdot e^{-\lambda t} \\
N(0) = N_0 \Rightarrow N(t) &= N_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{N(t)\} = F(s)$$

und der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{\dot{N}(t)\} = s\mathcal{L}\{N(t)\} - N(0)$$

und der Randbedingung $N(0) = N_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$
\begin{aligned}
sF(s) - N_0 + \lambda F(s) &= 0 \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{N_0}{s+\lambda} \\
N(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = N_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$