Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM11

M. Oettinger 28.6.2012

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(6 Punkte)

$$\begin{aligned} K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}, v > 0 \\ \Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2) - a^2 v 2v}{(v^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - 2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned} K'(v) = \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2v^2 = 0 \\ \Leftrightarrow v^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

$$\sqrt{2,1} = (2,1)^{1/2}\,,$$

es liegt nahe, die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{1/2}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2+x} \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{2} \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\,(2+x)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,(2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x$$

und die Funktion

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx T_1(x) \\
\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x\right) \\
\frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}}T_1(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0,1\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdot 0,1 = 1 + \frac{1}{40} = 1,025.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{3x}\cdot 2x\right)' = 3e^{3x}\cdot 2x + e^{3x}\cdot 2 = e^{3x}(6x+2)$$

b) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{x^3}\cdot 2x^2\right)' = e^{x^3}\cdot 3x^2\cdot 2x^2 + e^{x^3}\cdot 2\cdot 2x = e^{x^3}(6x^4+4x)$$

c) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

d) differenzierbar für $x > 0$, da definiert und stetig in $\mathbb{R}^+$.

$$(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

e) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{\cos(2x)}\right)' = e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(x) \cdot e^{\cos(2x)}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Untersuchung der Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$ im Intervall $]-\frac{3}{2}, 3[$:
Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ f''(x) &= 6x \\ f^{(3)}(x) &= 6 \end{aligned}$$

Nullstellen: $f(x) = x^3 - 3x - 2 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 2$. Durch Ausprobieren findet man ganz einfach $x_1 = 2$ als Nullstelle. Polynomdivision liefert die zweite Nullstelle $x_2 = -1$.

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 \qquad\quad - 3x - 2\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\;\; 2x^2 - 3x \\ \qquad \underline{-\,2x^2 + 4x} \\ \qquad\qquad\quad\; x - 2 \\ \qquad\qquad\; \underline{-\,x + 2} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \pm \sqrt{1-1} = -1$$

Extrema: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$. Einsetzen in die Funktion $f(\pm 1) = (\pm 1)^3 \pm 3 - 2$ liefert die Extrema $(1, -4)$ und $(-1, 0)$.

Einsetzen in die zweite Ableitung:
$f''(\pm 1) = \pm 6 \Leftrightarrow$ Maximum bei $(-1, 0)$, Minimum bei $(1, -4)$.

Wendepunkte:
$f''(x) = 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$f^{(3)}(x) = 6 > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $(0, -2)$.

Für $x \to \pm\infty$ verhält sich die Funktion wie x^3:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Skizze der Funktion im angegebenen Intervall:

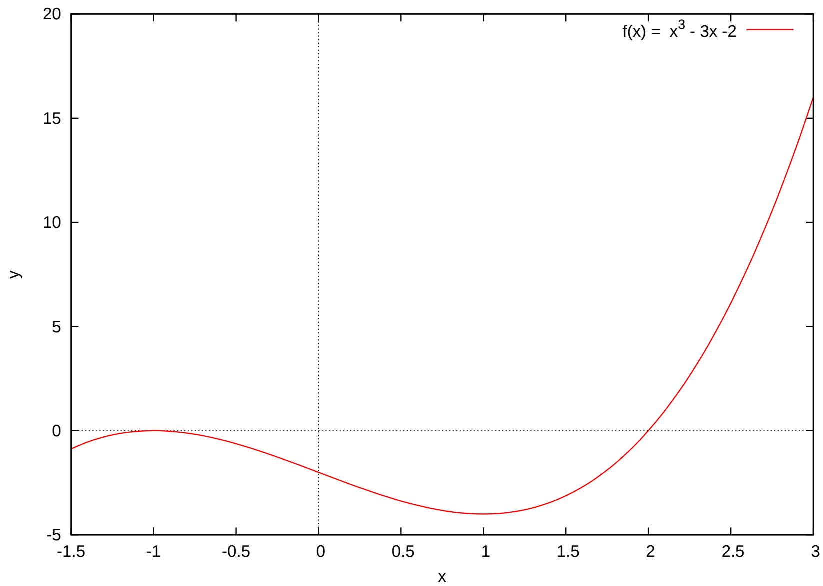

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = x^3 - 3x - 2$ im Intervall D.

Aufgabe 5

(11 Punkte)
Taylorpolynom $T_3(x)$ zu $f(x) = e^x \sin x$ um die Stelle $x_0 = 0$: benötigt werden

die ersten drei Ableitungen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x \sin x && \Rightarrow f(0) = 1 \cdot 0 = 0 \\
f'(x) &= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) && \Rightarrow f'(0) = 1(0+1) = 1 \\
f''(x) &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x && \Rightarrow f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \\
f^{(3)}(x) &= 2(e^x \cos x - e^x \sin x) = 2e^x(\cos x - \sin x) && \Rightarrow f^{(3)}(0) = 2(1-0) = 2.
\end{aligned}
$$

Damit kann das Taylorpolynom nach der Vorschrift

$$
\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)(x_0)}}{n!}(x-x_0)^n = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\
&= 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

(5 Punkte)
vollständige Induktion: $f(x) = e^x \cdot x$.

$$\text{Beh. } f^{(n)} = f(x) + e^x \cdot n = e^x(x+n)$$

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$f'(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x(x+1)$$

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \underbrace{=}_{\text{n. Vor.}} & \left(e^x(x+n)\right)' \\
&= e^x(x+n) + e^x \cdot 1 \\
&= e^x(x+(n+1))
\end{aligned}
$$