Übungsklausur Mathematik III

Oettinger 2017

Zeit: 90Min.

<u>Hilfsformeln</u>

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$\ln a - \ln b = \ln \tfrac{a}{b} \qquad \ln a + \ln b = ln(a \cdot b)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)dx \quad b_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)dx$$

Laplace-Transformierte

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Integrale $\int f(x)dx$ der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(b) $f(x) = \cos^2(x) \cdot \tan(x)$

(c) $f(x) = 2xe^{x^2}$

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebene Fläche und berechnen Sie das Flächenintegral der Funktion $f(y) = \frac{4}{3} \cdot y$ über die Fläche.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = (x + C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Ist die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{2}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung?

(c) Wie nennt man die Lösung in a), wie die Lösung in b)?

Aufgabe 4

Von welchem Typ ist die Differentialgleichung $y'(x) + 2\lambda y(x) = e^{-2\lambda x}x^2$? Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ über die Variation der Konstanten.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + x^2\,(y(x))^3 = 0$$

und geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 2$ an. Um welchen Typ DGL handelt es sich?

Aufgabe 6

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$
$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$
$$F(y^{(3)}, \sin(y), 2x) = 0 \tag{3}$$

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y'' - y + 4x \qquad y(0) = -127?$$

Aufgabe 7

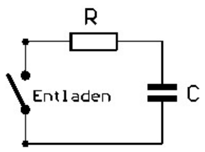
Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion, die durch $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$ definiert ist. Sie kann in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden, wobei $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ (es handelt sich um eine ungerade Funktion). Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten b_1.

Aufgabe 8

Ein Kondensator wird mit der Spannung U_0 aufgeladen und zur Zeit $t = 0$ über einen Widerstand R entladen:



Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz (Maschenregel) gilt dann:

$$U(t) - RI(t) = 0,$$

der Strom $I(t)$ des Kondensators beträgt

$$I(t) = -C\dot{U}(t).$$

Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Kondensatorentladung mit der Randbedingung $U(t = 0) = U_0$ auf und lösen Sie sie

a) auf die herkömmliche Art und

b) über eine Laplace-Transformation

c) und skizzieren Sie den Spannungsverlauf $U(t)$ für $t > 0$.