Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 (TMM15)

M. Oettinger 03.2016

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte):

a) Nullstellen

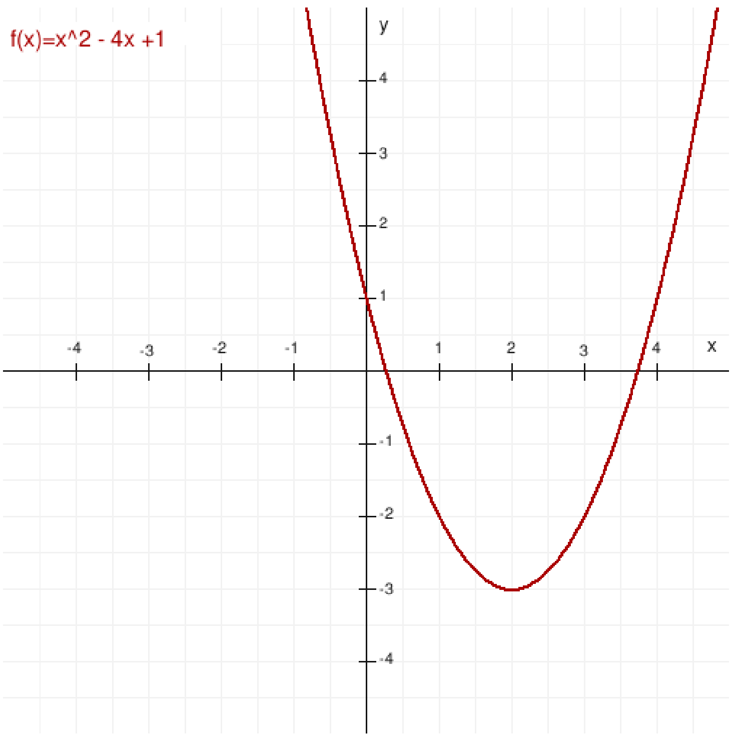
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 1 \\ &= x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 3 = (x-2)^2 - 3 = 0 \\ (x-2)^2 &= 3 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{3} \\ x &= 2 \pm \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 - \sqrt{3}, \;\; x_2 = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

b) Symmetrie

$$\begin{aligned} f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 1 = x^2 + 4x + 1 &\neq f(x) \\ \text{und } &\neq -f(x) \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x)$ ist nicht symmetrisch.

c) Funktionsgraph: es handelt sich um eine Normalparabel mit Scheitel bei (2/-3).



Aufgabe 2

(10 Punkte)
Lösungen der Gleichungen

a) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$, die erste Lösung $x_1 = 1$ lässt sich einfach erraten.
Durch Polynomdivision durch den Faktor $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 - 2x^2 - 11x + 12\right) : \left(x - 1\right) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad -\,x^2 - 11x \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; x^2 \quad - x} \\
\qquad\qquad\qquad -\,12x + 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;\; 12x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

die weiteren Lösungen z. B. mit der $p-q-$Form

$$\begin{aligned} x_{2/3} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow x_2 = 4 \quad x_3 = -3 \end{aligned}$$

b)

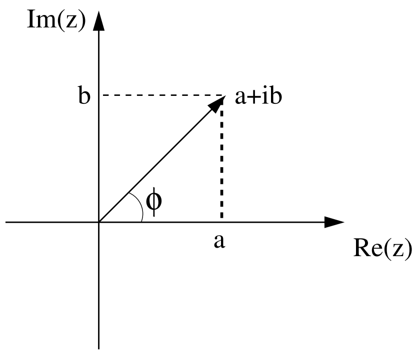
$$\prod_{i=1}^{4} i + \sum_{k=0}^{4} k + \sum_{l=1}^{3} 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 \cdot 2 = 24 + 10 + 6 = 40$$

c)

$$5! + \sum_{k=0}^{3} (2k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 + 3 + 5 + 7 = 120 + 16 = 136$$

Aufgabe 3

(14 Punkte)



a)

b) Kartesische Darstellung: mit $a = r\cos(\varphi), b = r\sin(\varphi)$ und $z_1 = a + ib$ folgt unter Ausnutzen von $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$:

$$z_1 = a + ib = 2\cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot 2\sin(\frac{\pi}{6}) = 2\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\frac{1}{2} = \sqrt{3} + i.$$

c) der Betrag $|z|$ ist natürlich $r = 2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1} = \sqrt{3} - i$.

d)

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= \sqrt{3} + i + 2\sqrt{3} + i = 3\sqrt{3} + 2i \\
z_1 - z_2 &= \sqrt{3} - i - (2\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + i - i \\
&= -\sqrt{3} \\
\frac{z_2}{z_1} &= \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{z_1 \cdot \overline{z_1}} = \frac{1}{|\overline{z_1}|^2} \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} = \frac{(2\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}{3 + 1} \\
&= \frac{6 + 1 - i \cdot 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{4} = \frac{7 - i\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(7 Punkte): Beweis mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang mit $n_0 = 1$:

$$n_0^2 + n_0 = 0, \text{ gerade.}$$

Induktionsschritt:
die Voraussetzung ist

$$n^2 + n \text{ ist gerade.}$$

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + n + 1 &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 = (n^2 + n) + 2n + 2 \\
&= (n^2 + n) + 2(n + 1)
\end{aligned}$$

Der erste geklammerte Ausdruck ist nach Voraussetzung gerade, der zweite ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2 und daher gerade (denn $n + 1 \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 5

(16 Punkte):

a) Das LGS heißt linear, weil die Variablen x_i in allen Gleichungen in linearer Form auftreten. Die Matrix und die Matrixgleichung lauten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$v \cdot A$ ist nicht berechenbar!

$$v^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

c) Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z2}\cdot 2,\ \text{Z3}+\text{Z3}+\text{Z1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z2}-\text{Z1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z3}:3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z3}-\text{Z2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z3}:2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z1}+\text{Z3},\ \text{Z2}-\text{Z3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z1}-3\cdot\text{Z2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z1}:2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Z1}:2}$$

Die Lösung des LGS lautet $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 2$.