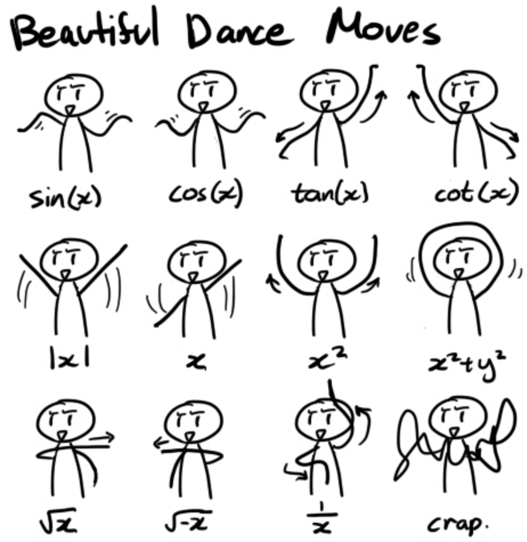
Übungsklausur Mathematik I

TMM15

Zeit: 90Min.



Aufgabe 1

Gegeben sind die Relationen

$$r_1(x) = e^{|x|}, \quad r_2(x) = e^{|-x|}$$

mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

a) Handelt es sich um Funktionen (wenn ja, warum)?

b) Schreiben Sie $r_1(x)$ und $r_2(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie auf Symmetrie. Handelt es sich um gerade oder ungerade Funktionen oder Relationen?

c) Untersuchen Sie

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2} - 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

auf Nullstellen, Schnittpunkte mit den Achsen und Symmetrie. Handelt es sich um eine Funktion?

Zeichnen Sie die Kurve in einem passend gewählten Intervall.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bilden Sie das Matrixprodukt $C = A \cdot B$

b) Multiplizieren Sie das Ergebnis aus a) mit dem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) und die Matrix D mit dem Ergebnis aus b).

Aufgabe 3

Arno Nym verhandelt mit seiner Oma Mira Nym (geborene Bellenbaum) über sein Taschengeld. Oma Mira bietet eine Einmalzahlung von 20,- und die Zahlung von 10,- bei jedem weiteren Besuch. Arno hätte gern sofort 0,50, beim nächsten Besuch 1,- gefolgt von 1,50 beim übernächsten Besuch, also bei jedem Besuch eine Steigerung um -,50.

Wieviele Besuche der Oma müssen vergehen, bis Arno gegenüber der Version seiner Oma gewinnt?

Aufgabe 4

Der Punkt P lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem durch den Vektor

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Durch eine Spiegelung an der y-Achse ergibt sich daraus der Punkt Q. Die Spiegelung kann als Symmetrieoperation durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ beschrieben werden, es gilt

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q$$

(a) Wie lauten die Koordinaten des Punkts Q? Berechnen Sie die Matrix A.

(b) Stellen Sie die Matrix $B = (b_{ij})$ auf, die die Spiegelung an der x-Achse beschreibt.

(c) Wie sieht die Matrix $C = (c_{ij})$, die eine Punktspiegelung am Ursprung beschreibt, aus? Was passiert, wenn das Produkt $A \cdot B$ auf den Punkt P angewendet wird? Was lässt sich daraus folgern?

Aufgabe 5

Eine komplexe Zahl z wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt
$(\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}})$.

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z = a + i \cdot b$ dar

c) Wie lautet der Betrag $|z|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ zu z?

Aufgabe 6

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

für alle $n \in \mathbb{N}; n > 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Kantenlänge a des Würfels, dessen Volumen um 271cm^3 wächst, wenn die Kante um einen Zentimeter verlängert wird.