## Aufgabe 1

(7 Punkte)
$U$ sei der (fest vorgegebene) Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Wie muss das Rechteck beschaffen sein, um eine möglichst große Fläche zu besitzen?

Warum liefert die Rechnung kein Ergebnis, wenn man das Rechteck mit der kleinsten Fläche sucht?

## Aufgabe 2

(10 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen lassen sich ableiten? Bestimmen Sie die erste Ableitung, sofern möglich.

a)

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+2x+1}; \qquad x \geq 0$$

b)

$$f(x) = 12e^x$$

c)

$$f(x) = e^{12x}$$

d)

$$f(x) = e^{12 \cdot \sin(x)}$$

## Aufgabe 3

(13 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = 4x - 3x^3$$

im Intervall $D = ]-1,5; 1,5[$ auf Symmetrie, Extrema, Nullstellen,i Wendepunkte, Schnittpunkte mit der $y$-Achse und Asymptoten. Skizzieren Sie die durch die Funktion gegebene Kurve im angegebenen Intervall.

## Aufgabe 4

(12 Punkte)
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ in eine Taylorreihe. Was lässt sich aus dem Ergebnis für den Konvergenzradius schließen (die Berechnung des Konvergenzradius ist nicht nötig)?

## Aufgabe 5

(8 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^n, \;\; n \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $n > 0$ ist $f(x)$ differenzierbar?

b) Berechnen Sie die Ableitung für $n = 1$ ($f(x) = x$) direkt über den Grenzwert des Differenzenquotienten.

c) Berechnen Sie die erste Ableitung von $x^2, x^3$ und $x^4$ mithilfe der Produktregel.

d) Man erkennt die Ableitungsregel $(x^n)' = n \cdot (x^{n-1})$. Beweisen Sie, dass sie für alle ganzzahligen $n \geq n_0 = 1$ gilt.

## Aufgabe 6

(5 Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin(x)}$$

b)

$$\lim_{x \to 0+} x \ln x$$