Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM15

Aufgabe 1

Wenn x, y die Koordinaten des Punktes darstellen, ist die Fläche des Rechtecks

$$A = 2xy$$

oder mit der Kreisgleichung $r^2 = x^2 + y^2$

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Um das Maximum zu finden, kann die erste Ableitung der Funktion $A(x)$

$$\begin{aligned}
A'(x) =& 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) \\
=& 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
=& \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

gleich Null gesetzt werden, also

$$2r^2 - 4x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
A''(x) &= \frac{2(-2)2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2(r^2 - 2x^2)(-\frac{1}{2})(-2x)}{\sqrt{r^2 - x^2}^3} \\
&= \frac{-8x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2x(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}^3} \\
A(\frac{r}{\sqrt{2}}) &= \frac{-8\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} + \frac{2\frac{r}{\sqrt{2}}(r^2 - r^2)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3} = -8 < 0,
\end{aligned}$$

Es handelt sich also um das gesuchte Maximum. Mit dem gefundenen Wert für x kann natürlich auch der y-Wert des Punkts bestimmt werden:

$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \Rightarrow y = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ positiv, da } y >= 0$$

Die Fläche des Rechtecks beträgt dann

$$A = 2xy = 2\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

soll in eine Reihe entwickelt werden. Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) & f(0) &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}(-1)\right) & f'(0) &= \frac{1}{2}(1-1) = 0 \\
f''(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}(-1)\right) & f''0) &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}(-1)\right) & f^{(3)}(0) &= \frac{1}{2}(1-1) = 0
\end{aligned}$$

offensichtlich wechselt die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ ständig zwischen 0 und 1. Damit wird die MacLaurin-Reihe zu

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \\
&= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}
\end{aligned}$$

(der Index k berücksichtigt nur die geraden Glieder der Entwicklung). Bis auf das wechselnde Vorzeichen der Summanden entspricht die Reihe der Potenzreihe des Kosinus, sie wird als Kosinus Hyperbolicus bezeichnet. Die Funktion zeigt Spiegelsymmetrie zur y-Achse (alle Glieder der Entwicklung sind gerade!).

Aufgabe 3

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned} t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\ t_1(x) = f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) &= 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\ t_2(x) = f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) &= 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

c) Die höchste Potenz von x überwiegt, für große Variablenwerte geht die Funktion gegen $-\infty$, für kleine gegen $+\infty$.

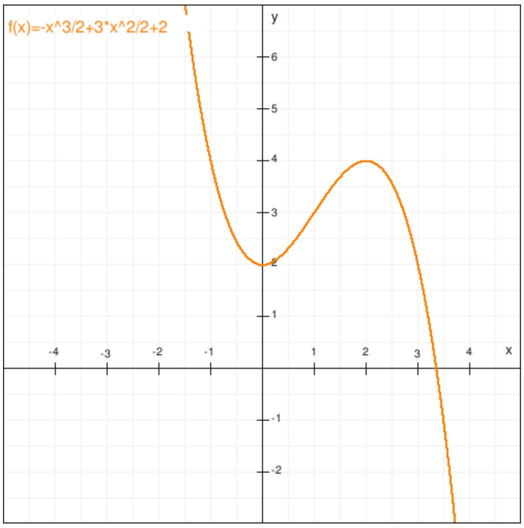
d) 

Abbildung 1: Skizze der Funktion.

Aufgabe 4

Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x(x^2 - 5x + 5) = 0 \\
x^2 - 5x + 5 &= 0 \\
\Rightarrow x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Extrema:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x^2 - 5x + 5) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x) = 0 \\
x^2 - 3x &= 0 \\
x_3 &= 0\,; \quad x_4 = 3 \\
f(0) &= 5\,; \quad f(3) = -e^3. \\
f''(x) &= e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) \\
f''(0) &= -3 < 0\,; \quad f''(3) = 3e^3 > 0
\end{aligned}
$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.

Wendepunkte:

$$f''(x) = e^x(x^2 - 3x) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 3) = 0$$
$$x^2 - x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow x_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$
$$f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}) \approx 7,89$$
$$f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}) \approx 4,13$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/7,89)$ und $(-1,30/4,13)$. $f''(0) = e^0(0-0-3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\lim_{x\to\infty} e^x(x^2 - 5x + 5) = \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty} (x^2 - 5x + 5) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2 - 5x + 5) = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2 + 5x + 5}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+$$

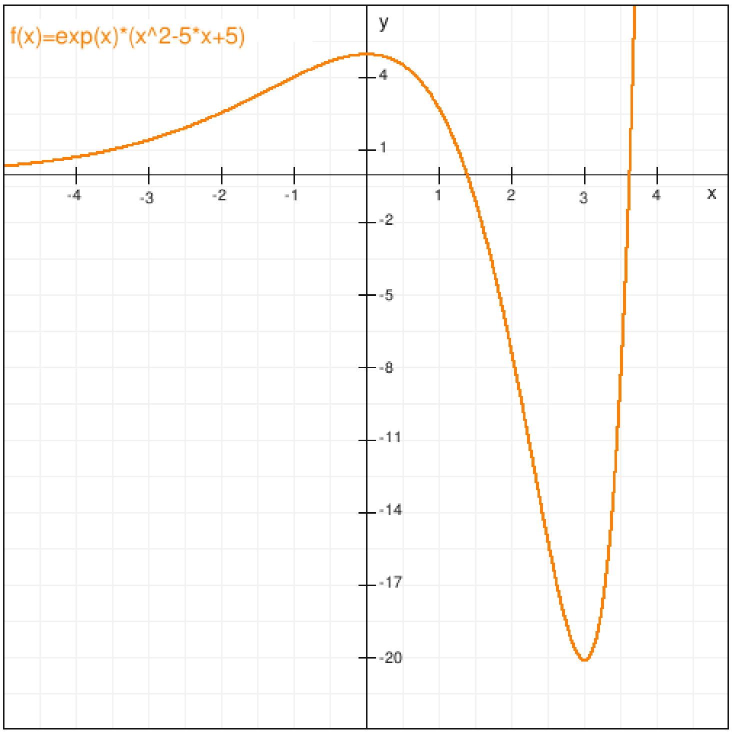


Abbildung 2: die Funktion $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5)$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 5

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 = 3x^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Majorantenkriterium:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k \cdot k} = b_k$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert. Da alle Reihenglieder $a_k < b_k$ ($k > 0$), konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Berechnung der Summe:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

die Partialsumme s_n lautet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Mit der Potenzreihe der Exponentialfunktion und der eben berechneten Reihe folgt sofort

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \right) = e^{ix} + 1$$

also ist

$$g(\pi) = e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$$

(das ist die Euler-Identität!)