Musterlösung zur Übungsklausur
Mathematik III
TMM15

15.12.2016

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$:

$$\begin{aligned}\int 2x^2 \cdot e^x dx &= 2x^2 e^x - \int 4xe^x dx \\ &= 2x^2 e^x - \left[4xe^x - \int 4e^x dx\right] \\ &= 2x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x + C = (2x^2 - 4x + 4)e^x + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x) \cdot \tan(x) dx &= \int \cos^2(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \cos(x)\sin(x) dx \\ &= \int u \cdot \cos(x) \frac{du}{\cos(x)} = \int u du = \frac{u^2}{2} + C\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$= \frac{\sin^2(x)}{2} + C$$

(c) $\int 2xe^{x^2}dx$: Substitution $u(x) = x^2$, also

$$\frac{du(x)}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

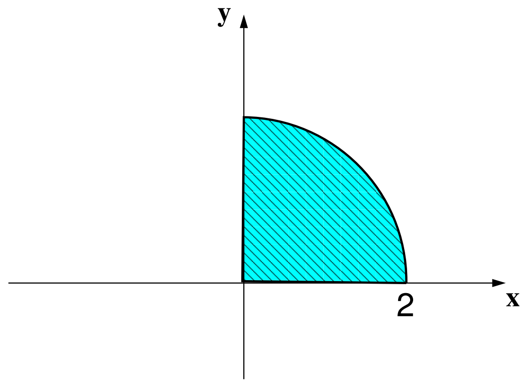
$$\int 2xe^{x^2}dx = \int 2xe^u \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C$$

Rücksubstitution:

$$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + C$$

Aufgabe 2

Bei der durch $x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreis mit Radius $R = 2$:



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!) $y = r\sin(\varphi), \quad dA = rdrd\varphi$:

$$\int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} r\sin(\varphi) r dr d\varphi = \frac{4}{3}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \sin(\varphi)d\varphi = \frac{4}{3}\frac{8}{3}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{32}{9}\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi)d\varphi = \frac{32}{9}\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{32}{9}\Big(-\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos(0)\Big) = \frac{32}{9}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= (x+C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} &(2x+2C)^2 - 2x(2x+2C) - 2(x^2 + 2xC + 2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} \\ y' &= \frac{2}{2}x = x \end{aligned}$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

$$y' = 2x \cdot (y(x))^2$$

ist von der Form $y' + f(x) \cdot g(y) = 0$, man erkennt sofort die triviale Lösung $y(x) = 0$. Die DGL kann über Separation der Variablen gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
y' &= 2x \cdot (y(x))^2 \\
\frac{dy}{dx} &= 2x \cdot y^2 \\
\frac{dy}{y^2} &= 2x \cdot dx \\
\int \frac{1}{y^2} dy &= \int 2x dx \\
-\frac{1}{y} &= \frac{2}{2} x^2 + C
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = \frac{1}{C - x^2}$$

Aufgabe 5

Anfangswertproblem (10 Punkte):

$$2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \qquad y \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

Es handelt sich um eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung. Die zugehörige homogene Gleichung $2xy' - y = 0$ kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \quad y_0 = Ce^{\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx}$$

$$= Ce^{\frac{1}{2} \ln|x|} = Ce^{\ln|\sqrt{x}|} = C \cdot \sqrt{x}$$

Die inhomogene Gleichung wird durch Variation der Konstanten gelöst:

Ansatz: $y = C(x)\sqrt{x}$,

$$y' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

eingesetzt in die inhomogene Gleichung $2xy' - y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
2xC'(x)\sqrt{x} + \underbrace{\frac{2x}{2\sqrt{x}}C(x) - C(x)\sqrt{x}}_{=0} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\
2xC'(x)\sqrt{x} &= 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \\
C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}2x\sqrt{x}} &= \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^2} \\
C(x) = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}(-2)x^{-\frac{1}{2}} &- (-1)\frac{1}{x} + K \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + K
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet also

$$y(x) = C(x)\sqrt{x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + K\sqrt{x}$$

Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems (Bestimmung des freien Parameters K): $y \to -1$ für $x \to \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ für } x \to \infty \Longrightarrow -1 + K\sqrt{x} \to -1 \text{ für } x \to \infty$$

$$\Longrightarrow K = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 6

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$

$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 7

Bestimmung des Fourier-Koeffizienten b_1 für die 2π-periodische Sägezahnfunktion $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi}{2}\sin(x)dx - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2}\sin(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[\sin(x) - x\cos(x)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi}(-2\pi) = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

(8 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(t) + \lambda f(t) = 0 \\
\frac{d}{dt}f(t) &= -\lambda f(t) \\
\frac{df(t)}{f(t)} &= -\lambda dt = 0 \\
f(t) = C \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

und der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

und der Abkürzung $f(0) = f_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned}
sF(s) - f_0 + \lambda F(s) = 0 \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{f_0}{s+\lambda} \\
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = f_0 \cdot e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$