Musterlösung zur Übungsklausur Mathematik 1 TMM11

M. Oettinger 3.2012

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(14 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$f(x) == x \cdot e^{-|x|} = \begin{cases} x \cdot e^{-}x & \text{für} x \geq 0 \\ x \cdot e^{x} & \text{für} x < 0 \end{cases}$$

Symmetrie: $f(-x) = (-x) \cdot e^{-|-x|} = (-x) \cdot e^{-|x|} = -f(x)$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung bzw. ungerade.

(b) Stetigkeit in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} x \cdot e^{-}x = 0$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x \cdot e^{x} = 0$$

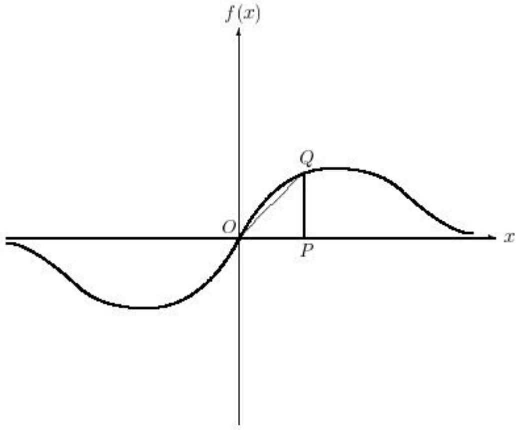
$\Rightarrow$ die Funktion $f(x)$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

(c) Grenzwert für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-}x = 0+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{x} = 0-$$

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0+} (\sin(x))^x &= \lim_{n\to 0+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \right)^x \\
&= \lim_{n\to 0+} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... \right)^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \\
&\Longrightarrow \lim_{n\to 0+} (\sin(x))^x = 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

b)

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

Wenn die Folge gegen g konvergiert, muss für große n gelten:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - (2n+1)}{2 \cdot (2n+1)} \right| = \left| \frac{-1}{4n+2} \right| = \frac{1}{4n+2}$$

Die Folge konvergiert gegen g, wenn

$$\frac{1}{4n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

was für große n und beliebig kleine, aber feste ε erfüllt ist.

Aufgabe 3

Oma Nym bietet nach n Besuchen die Summe von

$$S_1 = 10 + \sum_{i=1}^{n} 10 = 10 + n \cdot 10 = 10(n+1),$$

für Arnos Version ergibt sich (mit der Gauß-Summe)

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} 0,5 \cdot i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Arno gewinnt, wenn seine Summe größer ist, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &> 10(n+1) \\ \frac{n}{4} &> 10 \\ n &> 40 \end{aligned}$$

Ab dem 41. Besuch ist Arnos Summe größer.

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + ... \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + i\frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + -i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \\ &= \frac{1}{0!} \cdot 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... \\ &+ i\left(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...\right) \end{aligned}$$

Mit der Euler-Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Der Fehler liegt beim Übergang von Zeile (7) nach (8), denn

$$4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2} \neq 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

Die Funktion $x \longmapsto x^2$ ist nicht bijektiv (eineindeutig) und damit nicht umkehrbar - deshalb hat die Wurzel eine positive und eine negative Lösung. Aus der Aussage $(-a)^2 = a^2$ folgt eben nicht, dass $a = -a$ (falls $a \neq 0$).

Aufgabe 6

a)

$$x^3 + \frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{4} i + 2x = \frac{1}{3}\prod_{i=1}^{4} i$$

$$x^3 + \frac{x^2}{2}(1+2+3+4) + 2x - \frac{1}{3}1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$$

$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$$

Als erste Lösung wird z. B. $x_1 = 1$ erraten, Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 5x^2 + 2x - 8\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + 6x + 8 \\
\underline{-\,x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad 6x^2 + 2x \\
\qquad \underline{-\,6x^2 + 6x} \\
\qquad\qquad\quad 8x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{-\,8x + 8} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x_{2/3} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8} = -3 \pm \sqrt{\frac{36-32}{4}} = -3 \pm \sqrt{1}$$

$$x_2 = -2\ ,\ x_3 = -4$$

b)

$$\begin{aligned}
x^3 + 3x &= 0 \\
x(x^2+3) &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\
x^2 + 3 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -3 \\
x_{2/3} &= \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{3} = \pm i\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$
\begin{aligned}
0,\bar{9} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \\
&= 9 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} - 1 \right) \text{ zusätzlicher Summand wg. } k = 0,
\end{aligned}
$$

bei der Summe handelt es sich um die geometrischen Reihe, die gegen den Wert

$$
\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ konvergiert, da } |q| < 1.
$$

$$
\Rightarrow 0,\bar{9} = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \left(\frac{1}{\frac{9}{10}} - 1 \right) \qquad = 9 \left(\frac{10}{9} - \frac{9}{9} \right) = \frac{9}{9} = 1.
$$