Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM14

M. Oettinger 25.6.2015

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte)

$$
\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2 + b^2}, v > 0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2 + b^2) - a^2 v 2v}{(v^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{a^2 v^2 + a^2 b^2 - 2a^2 v^2}{(v^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{a^2 b^2 - a^2 v^2}{(v^2 + b^2)^2}
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$
\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2 b^2 - a^2 v^2}{(v^2 + b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2 b^2 - a^2 v^2 = 0 \\
\Leftrightarrow v^2 &= b^2
\end{aligned}
$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung.

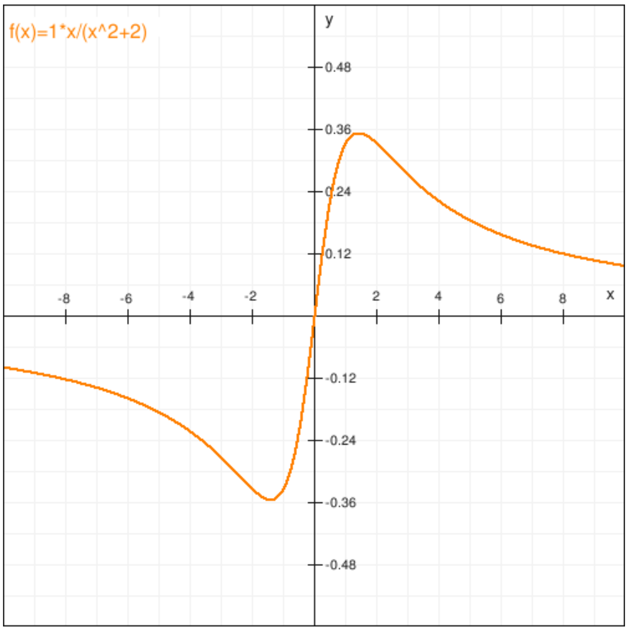

Abbildung 1: Die Funktion $K(v)$ mit $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$.

Die Funktion $K(v)$ besitzt bei $v = 0$ kein Minimum - der kleinste Wert der Bremsleistung kommt nur dadurch zustande, dass die Geschwindigkeit erst ab diesem Wert betrachtet wird! Am Rand des Definitionsbereichs kann die Ableitung keine Extrema liefern.

Aufgabe 2

Die Tangente ist

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

die erste Ableitung der Funktion

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 2e^{2x} - [1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)]\right)$$
$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 2e^{2 \cdot 0} = \frac{2}{3},$$

mit

$$f(x_0) = \frac{1}{3} \cdot 2e^0 = \frac{1}{3}$$

folgt die Tangentengleichung

$$t(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot x.$$

Wegen
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
ist die Tangentengleichung natürlich genau das MacLaurin-Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.
$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x + 2)$$

b) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.
$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.
$$\left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

d)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 1 + 1^2} \quad \text{mit } f(x) \geq 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = x + 1 \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - x^3 \\
f'(x) &= 6x - 3x^2 \\
f''(x) &= 6 - 6x \\
f^{(3)}(x) &= -6
\end{aligned}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) = 3x^2 - x^3 = 0 \ &\Leftrightarrow \ x^2(3-x) = 0 \\
x_1 = 0; x_2 = 3 &
\end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x) = 6x - 3x^2 \ &\Leftrightarrow \ x(2-x) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2 \\
&f(0) = 0;\ f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum bei } (0/0) \\
&f(2) = 12 - 8 = 4;\ f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum bei } (2/4)
\end{aligned}$$

Wendestellen und Krümmung:

$$\begin{aligned}
f''(x) = 6 - 6x = 0 \ &\Leftrightarrow \ 1 - x = 0 \\
x = 1 & \\
f^{(3)}(x) = -6 \neq 0;\ f(1) = 2 &\Rightarrow \text{ Wendepunkt bei } (1/2) \\
f''(x) < 0 \text{ für } x > 1 &\Rightarrow \text{ linksgekrümmt} \\
f''(x) > 0 \text{ für } x < 1 &\Rightarrow \text{ rechtsgekrümmt}
\end{aligned}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} 3x^2 - x^3 \to \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} 3x^2 - x^3 \to \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty
\end{aligned}$$

Skizze der Funktion:

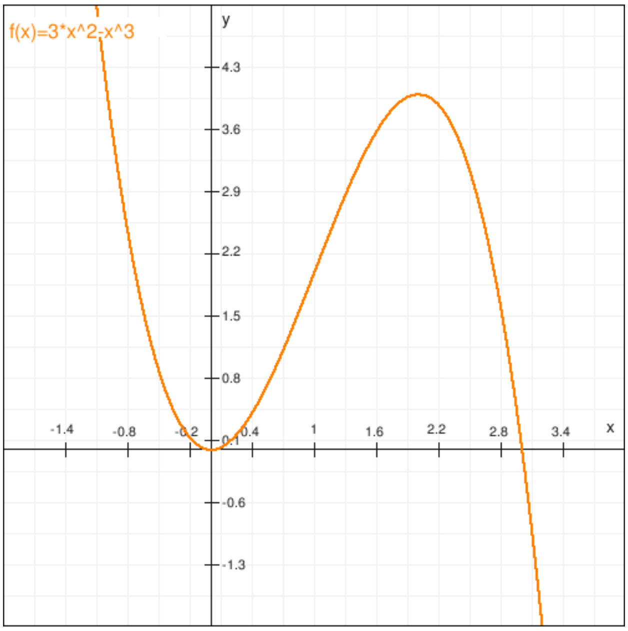

Abbildung 2: Skizze der Funktion im angegebenen Intervall.

Aufgabe 5

$$\sqrt{2,1} = (2,1)^{1/2}\,,$$

es liegt nahe, die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{1/2}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2+x} \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{2} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\,(2+x)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,(2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Also ist das Taylorpolynom

$$T_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x$$

und die Funktion

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx T_1(x) \\
\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x\right) \\
\frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} T_1(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,1\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cdot 0,1 = 1 + \frac{1}{40} = 1,025.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Der Grenzwert ist von der Form $0 \cdot (-\infty$, mit der Regel von de l'Hospital folgt

$$
\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0
$$