Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM14

M. Oettinger 17.12.2015

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (8 Punkte):

(a) Partielle Integration:

$$\int x \cdot \cos(3x)dx = x\frac{\sin(3x)}{3} - \int 1 \cdot \frac{\sin(3x)}{3}dx$$
$$= \frac{x\sin(3x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)\cos(3x)}{3} + C = \frac{3x\sin(3x) + \cos(3x)}{9} + C$$

(b) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi 1dx = [x]_0^\pi = \pi$$

(c) Trick: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, partielle Integration mit $u' = 1 \Rightarrow u = x$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$$

Aufgabe 2

(6 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

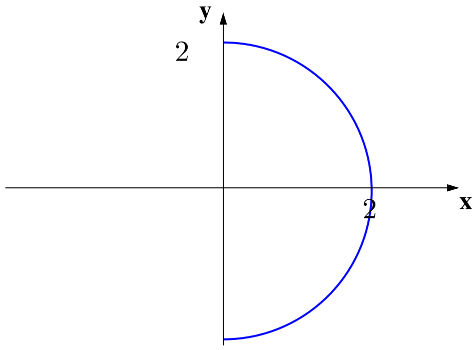

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$(A): \qquad x \geq 0; \; 0 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

$$\iint\limits_{(A)} x dA = \int\limits_{r=0}^{3} \int\limits_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} r \cdot \cos(\varphi) r dr d\varphi = [\sin(\varphi)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^2 dr$$
$$= (1-(-1)) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 3

(9 Punkte)
Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$y_0' + y = 0$$
$$y_0 = C \cdot e^{-\int 1 dx} = C \cdot e^{-x}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-x}$$
$$y'(x) = C'(x) e^{-x} - C(x) e^{-x}.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} y' + y = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = 2x + 5 \\ \Rightarrow \quad C'(x)e^{-x} = 2x + 5 \\ \Rightarrow \quad C'(x) = e^{x}(2x + 5) \end{aligned}$$

Integration (partiell) liefert die Funktion $C(X)$

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{x}(2x + 5)dx = e^{x}(2x + 5) - \int e^{x} 2dx \\ &= e^{x}(2x + 5) - 2e^{x} + C = e^{x}(2x + 3) + C. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} = (e^{x}(2x + 3) + C) \cdot e^{-x} \\ &= C \cdot e^{-x} + 2x + 3. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Die zugehörige homogene DGL

$$\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\begin{aligned} \dot{I}_0 = -\frac{R}{L} I(t) \Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} = -\int \frac{R}{L} dt \\ \ln|I_0| = -\frac{R}{L} t + \ln|C| \\ I_0(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} t}. \end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen DGL

a) über die Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$\begin{aligned} I(t) &= C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \\ \dot{I}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned}\frac{U_0}{L} &= \dot{C}(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}C(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}C(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\\ &= \dot{C}(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\\ &\Rightarrow \quad \dot{C}(t) = \frac{U_0}{L}\cdot e^{\frac{R}{L}t}\\ &\Rightarrow C(t) = \frac{U_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}dt = \frac{U_0}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\\ I(t) = C(t)I_0(t) &= \left(\frac{U_0}{R}e^{\frac{R}{L}t} + C\right)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} + C\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

b) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, also wählen wir als Ansatz

$$I_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned}0 + \frac{R}{L}A &= \frac{U_0}{L}\\ I_p(t) = A &= \frac{U_0}{R}\\ I(t) = I_0(t) + I_p(t) &= \frac{U_0}{R} + C\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y'' + yx^3 = 4y^2 \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	-
nicht-linear	X	X
homogen	-	X
inhomogen	X	-
Ordnung	1	2

Aufgabe 6

Differentialgleichung (1+3+3 Punkte)

(a) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung

(b)
$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

$f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

$$y = x \ln x \Longrightarrow y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Longrightarrow y'' = \frac{1}{x}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x \ln x = 0$$

(c)
$$f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2}, f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

einsetzen in die Gleichung liefert

$$-x^2\frac{2}{x^3} - x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \neq 0$$

$f(x)$ ist keine Lösung.

Aufgabe 7

(8 Punkte)

a) Die Differentialgleichung aus der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$u_L(t) + u_0 \cos(\omega t) = -L\frac{di(t)}{dt} + u_0 \cos(\omega t) = 0$$
$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{u_0}{L} \cos(\omega t)$$
$$\int 1 \cdot di = \frac{u_0}{L} \int \cos(\omega t)dt$$
$$i(t) = \frac{u_0}{L\omega} \sin(\omega t) + C$$

Die Konstante ergibt sich aus $i(0) = 0$ zu $C = 0$, also ist

$$i(t) = \frac{u_0}{L\omega} \sin(\omega t)$$

b) Die DGL Laplace-transformierte (es ist $i(0) = 0$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\frac{di(t)}{dt}\} &= \frac{u_0}{L}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \\
s \cdot \mathcal{L}\{i(t)\} - i(0) &= \frac{u_0}{L}\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \\
s \cdot I(s) &= \frac{u_0}{L}\frac{s}{s^2+\omega^2} \\
I(s) &= \frac{u_0}{L}\frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{u_0}{\omega L}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Rücktransformation liefert sofort

$$i(t) = \frac{u_0}{\omega L}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\} = \frac{u_0}{\omega L} \sin(\omega t)$$