Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM14

Aufgabe 1

Wenn x, y die Koordinaten des Punktes darstellen, ist die Fläche des Rechtecks

$$A = 2xy$$

oder mit der Kreisgleichung $r^2 = x^2 + y^2$

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Um das Maximum zu finden, kann die erste Ableitung der Funktion $A(x)$

$$\begin{aligned}
A'(x) =& 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) \\
=& 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
=& \frac{2(r^2 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

gleich Null gesetzt werden, also

$$2r^2 - 4x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
A''(x) &= \frac{2(-2)2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2(r^2 - 2x^2)(-\frac{1}{2})(-2x)}{\sqrt{r^2 - x^2}^3} \\
&= \frac{-8x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{2x(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}^3} \\
A(\frac{r}{\sqrt{2}}) &= \frac{-8\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} + \frac{2\frac{r}{\sqrt{2}}(r^2 - r^2)}{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^3} = -8 < 0,
\end{aligned}$$

Es handelt sich also um das gesuchte Maximum. Mit dem gefundenen Wert für x kann natürlich auch der y-Wert des Punkts bestimmt werden:

$$y^2 = r^2 - x^2 = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \Rightarrow y = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ positiv, da } y >= 0$$

Die Fläche des Rechtecks beträgt dann

$$A = 2xy = 2\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} = r^2$$

Aufgabe 2

Ableitung von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x} :$$
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2-x) - (x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}) :$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x}) \cdot \frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

d)

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) :$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x) + 1)$$

Aufgabe 3

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned} t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\ t_1(x) = f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) &= 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\ t_2(x) = f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) &= 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

c) Die höchste Potenz von x überwiegt, für große Variablenwerte geht die Funktion gegen $-\infty$, für kleine gegen $+\infty$.

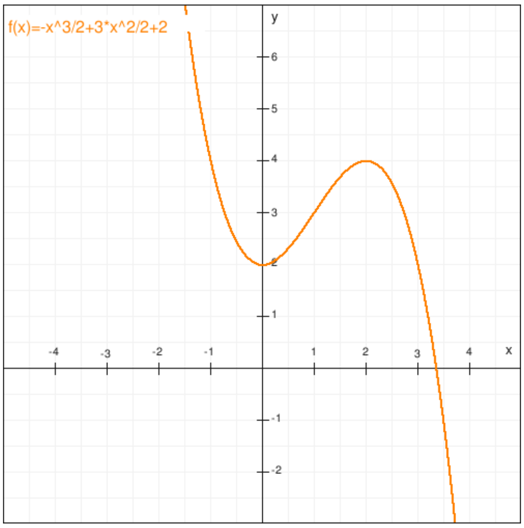
d) 

Abbildung 1: Skizze der Funktion.

Aufgabe 4

Nullstellen:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x(x^2-5x+5) = 0 \\ x^2-5x+5 &= 0 \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2-5x+5) + e^x(2x-5) = e^x(x^2-3x) = 0 \\ x^2-3x &= 0 \\ x_3 &= 0\,; \quad x_4 = 3 \\ f(0) &= 5\,; \quad f(3) = -e^3. \\ f''(x) &= e^x(x^2-3x) + e^x(2x-3) = e^x(x^2-x-3) \\ f''(0) &= -3 < 0\,; \quad f''(3) = 3e^3 > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat also ein (lokales) Maximum in $(0/5)$ und ein (lokales) Minimum in $(3/-e^3)$.

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^x(x^2-3x)+e^x(2x-3) = e^x(x^2-x-3) = 0 \\
x^2-x-3=0 & \\
&\Rightarrow x_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\
f(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}) \approx 7,89 & \\
f(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}) \approx 4,13 &
\end{aligned}$$

Die Wendepunkte sind $(2,30/7,89)$ und $(-1,30/4,13)$. $f''(0) = e^0(0-0-3) = -3 < 0$, die Funktion ist also zwischen den Wendepunkt rechtsgekrümmt.

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$ (für negative Werte wird zweimal die Regel von de L'Hospital benutzt):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} e^x \cdot \lim_{x\to\infty}(x^2-5x+5) = +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-5x+5) &= \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+5x+5}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0+
\end{aligned}$$

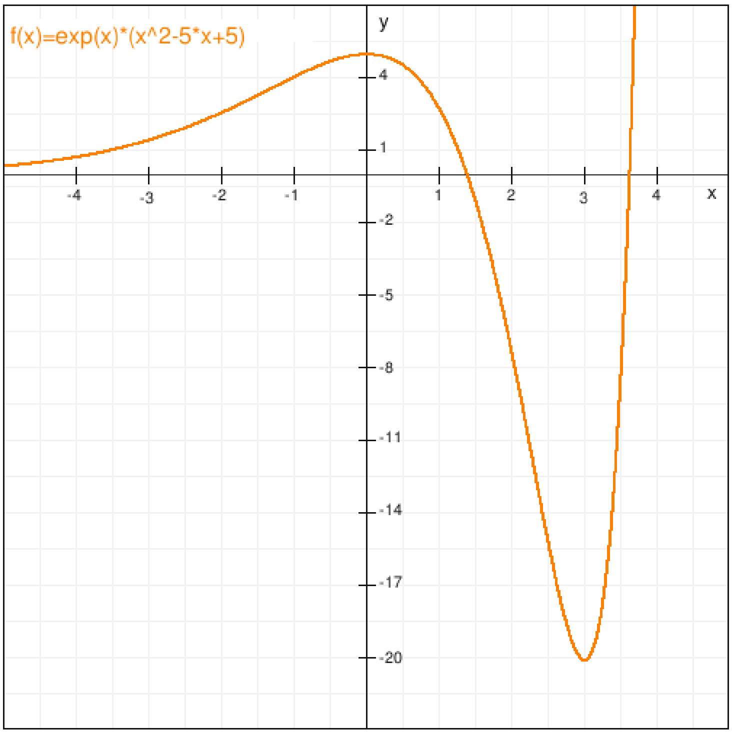


Abbildung 2: die Funktion $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 5)$ im Intervall $[-5; 5]$.

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 = 3x^2
\end{aligned}$$