Musterlösung zur Nachklausur Mathematik 1 TMM13

M. Oettinger 05.06.2014

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 54, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(10 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \frac{1}{|5(x-2)^3|} = \begin{cases} \frac{1}{5(x-2)^3} & \text{für} x \geq 2 \\ -\frac{1}{5(x-2)^3} & \text{für} x < 2 \end{cases}$$

Es handelt sich nicht um eine Funktion - dem Wert $x = 2$ aus D ist kein Wert y zugeordnet.

Symmetrie: sei $x \leq 2$, dann ist

$$r(-x) = \frac{1}{5(-x-2)^3} = -\frac{1}{5(x+2)^3} \neq -r(x) = -\frac{1}{5(x-2)^3}$$

$r(x)$ ist nicht symmetrisch.

(b) Stetigkeit in $x_0 = 2$: mit $u = x - 2$ folgt

$$\lim_{x \to 2+} r(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u \to 0+} \frac{1}{5u^3} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2-} r(x) = \lim_{x \to 2-} -\frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u \to 0-} -\frac{1}{5u^3} = \infty$$

$r(x)$ ist nicht stetig.

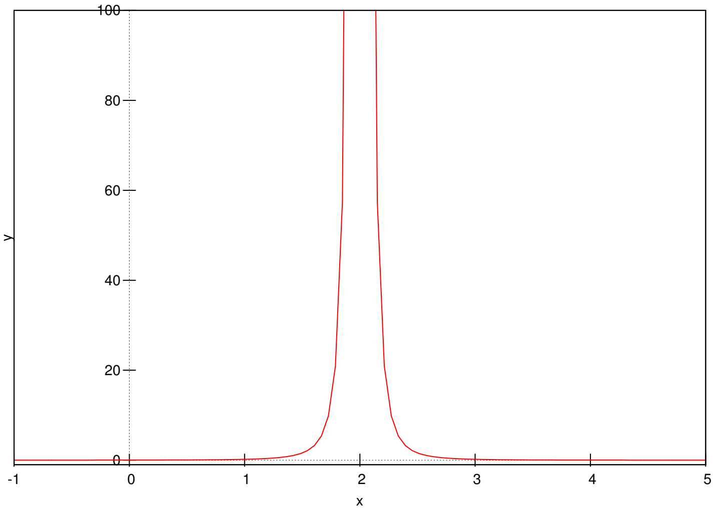
(c) Verhalten für $x \to \pm\infty$: mit $u = x - 2$

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{5u^3} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u\to-\infty} -\frac{1}{5u^3} = 0,$$

denn $r(u)$ ist ein Polynom, der Grad des Nenners ist größer als der Grad des Zählers.

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f :]0, \infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(x) + x$.

a) Warum ist f auf dem gesamten Definitionsbereich umkehrbar? Sowohl $g(x) = \ln(x)$ als auch $h(x) = x$ sind streng monoton wachsend im Intervall $]0, \infty[$. Damit ist die Summe $f(x) = g(x) + h(x)$ ebenfalls streng monoton wachsend, also umkehrbar.

b) Ist die Funktion stetig? $g(x) = \ln(x)$ ist im Definitionsbereich die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und damit stetig, $h(x) = x$ als Gerade ebenfalls. Die Summe der beiden stetigen Funktionen ist stetig.

c) Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \to 0+$? Wenn ja, welchen?

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) + x = \lim_{x\to 0+} \ln(x) + \lim_{x\to 0+} x \lim_{x\to 0+} \ln(x) + 0 = -\infty$$

Aufgabe 3

(4 Punkte):
Es ist offensichtlich

$$\frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}} \geq \frac{(\sqrt{k})^2}{k^2+\sqrt{k^4}} = \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{2k}.$$

Weil $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$

Aufgabe 4

(8 Punkte):

	$\sin(x)/x$	$x^2/7$	x^3	$3/x$
stetig	j	j	j	n
differenzierbar	j	j	j	n
monoton	n	n	j	n
Nullstelle(n)n	j	j	j	n

Aufgabe 5

(7 Punkte):

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{(\sqrt{x}+1)\cdot x} = \frac{\lim_{x\to 1} x+1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)\cdot \lim_{x\to 1} x} = \frac{2}{2} = 1$$

b)

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad > 0 \\ -1 & \text{für} \quad < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} f(x) = 1, \lim_{x\to 0-} f(x) = -1$$

$\Rightarrow$ der Grenzwert existiert nicht.

Aufgabe 6

Rechnen Sie die folgende komplexe Zahl in ihre algebraische Normalform ($z = a + ib$) um:

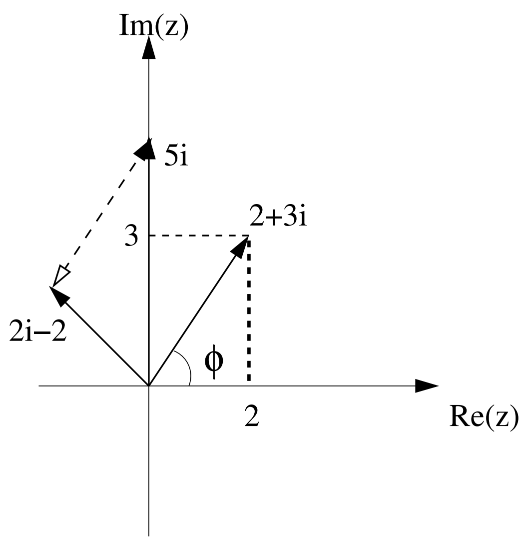
$$z_1 = 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Mit der trigonometrischen Darstellung

$$r \cdot e^{i\varphi} = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$
$$5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right) = 5(0+i) = 5i$$

Berechnen Sie die Differenz von z_1 und $z_2 = 2 + i \cdot 3$ und stellen Sie z_1, z_2 und $z_1 - z_2$ als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene dar:

$$z_1 - z_2 = 5i - (2+3i) = 2i - 2$$



Aufgabe 7

(8 Punkte)

a)

$$\sqrt{2x^2-1} + x = 0$$
$$\sqrt{2x^2-1} = -x$$
$$2x^2 - 1 = x^2$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

b)

$$\sqrt{\frac{4-x}{x+2}} \in \mathbb{R}, \text{ wenn } \frac{4-x}{x+2} > 0$$
$$4-x>0 \Rightarrow x<4$$
$$x+2>0 \Rightarrow x>-2$$

Die Werte der Wurzel sind reell für $-2 < x < 4$.