Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM13

6/2014

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2+b^2}, v > 0 \\
\Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2) - a^2 v 2v}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - 2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\
&= \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned}
K'(v) = \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2v^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow v^2 = b^2
\end{aligned}$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

Ableitung von

a)

$$\begin{aligned}\left(x^2(1+\sqrt{x})\right)' &= 2x(1+\sqrt{x}+x^2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2x+2x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x^2\frac{1}{\sqrt{x}} = x\left(2+2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \\ &= x\left(2+\frac{5\sqrt{x}}{2}\right)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x} : \\ f'(x) = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}) : \\ f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x})\cdot\frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f(x) = x^2\cdot\ln(x) : \\ f'(x) = 2x\ln(x)+x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2+2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} &= 1 \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned} t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\ t_1(x) &= f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) = 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\ t_2(x) &= f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) = 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - x^3 \\ f'(x) &= 6x - 3x^2 \\ f''(x) &= 6 - 6x \\ f^{(3)}(x) &= -6 \end{aligned}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 3x^2 - x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(3-x) = 0$$
$$x_1 = 0; x_2 = 3$$

Extrema:

$$f'(x) = 6x - 3x^2 \;\Leftrightarrow\; x(2-x) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$
$$f(0) = 0;\; f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum bei } (0/0)$$
$$f(2) = 12 - 8 = 4;\; f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum bei } (2/4)$$

Wendestellen und Krümmung:

$$f''(x) = 6 - 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x = 0$$
$$x = 1$$
$$f^{(3)}(x) = -6 \neq 0;\; f(1) = 2 \Rightarrow \text{ Wendepunkt bei } (1/2)$$
$$f''(x) < 0 \text{ für } x > 1 \Rightarrow \text{ rechtsgekrümmt}$$
$$f''(x) > 0 \text{ für } x < 1 \Rightarrow \text{ linksgekrümmt}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 - x^3 \to \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 - x^3 \to \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

Skizze der Funktion im angegebenen Intervall:

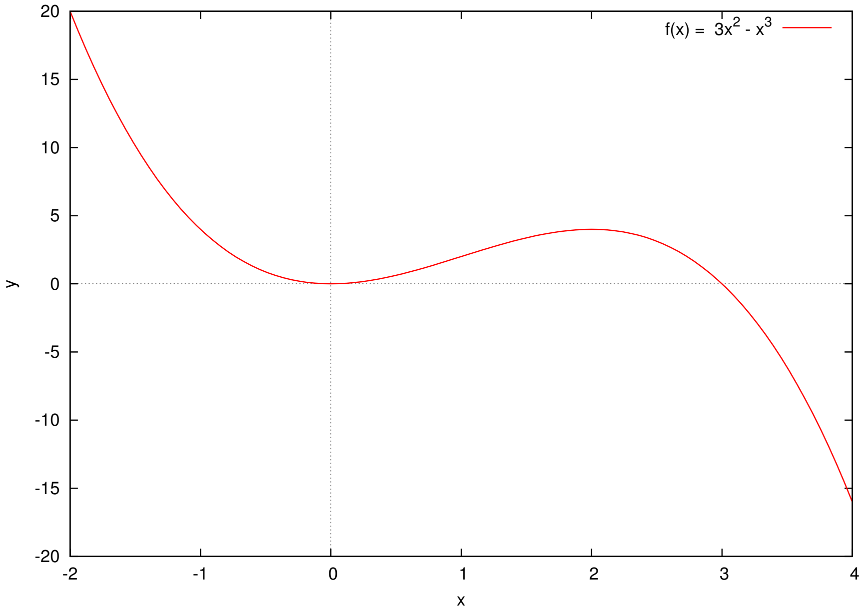

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3$ im Intervall D.

Aufgabe 5

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 = 3x^2
\end{aligned}
$$