Musterlösung zur Klausur Mathematik 2 TMM13

M. Oettinger 6.2014

Zeit: 90Min.

Aufgabe 1

Der Umfang des Rechtecks ist

$$U = 2(a+b) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{U}{2} - b$$

Die Fläche des Rechtecks ist eine Funktion der Variablen b

$$A = a \cdot b = \left(\frac{U}{2} - b\right) b = A(b)$$

$$\frac{d}{db}A(b) = \frac{U}{2} - 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{U}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{U}{2} - b = \frac{U}{4}$$

$$\frac{d^2}{db^2}A(b) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum!}$$

Die Lösung ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $U/4$. Die Rechnung für die kleinste Fläche funktioniert nicht, da der kleinste Flächenwert (für $b = 0$) am Rand des Definitionsbereichs der Funktion $A(b)$ liegt - der niedrigste Wert wird nicht als Minimum erkannt, da die Funktion auch für negative b Werte liefert (die allerdings nicht sinnvoll als Maß für die Fläche des Rechtecks sind).

Aufgabe 2

(7 Punkte)
Gleichung der Tangente $t(x)$ an die Kurve $f(x) = 3\sin(x) + 2\cos(3x)$ im Punkt $(0;0)$:

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(x) = 3\cos(x) - 2\sin(3x) \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 3$$

Tangentengleichung:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

mit den gefundenen Werten folgt für die Tangente

$$t(x) = 2 + 3x.$$

Dieses Ergebnis ist natürlich gleichzeitig das Mac Laurin - Polynom bis $n = 1$.

Aufgabe 3

(12 Punkte)
Ableitung von Funktionen.

a) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{3x} \cdot 2x\right)' = 3e^{3x} \cdot 2x + e^{3x} \cdot 2 = e^{3x}(6x + 2)$$

b) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{x^3} \cdot 2x^2\right)' = e^{x^3} \cdot 3x^2 \cdot 2x^2 + e^{x^3} \cdot 2 \cdot 2x = e^{x^3}(6x^4 + 4x)$$

c) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2+3}\right)^5 = \left(x^2+3\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2x = 5x\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3$$

d) differenzierbar da stetig in $\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)' = \frac{2x(x^2+3) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2x(x^2+3-x^2)}{(x^2+3)^2} = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

e) differenzierbar, da stetig in ganz $\mathbb{R}$.

$$\left(e^{\cos(2x)}\right)' = e^{\cos(2x)} \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(x) \cdot e^{\cos(2x)}$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Die benötigten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x^2+3} \\
f'(x) &= \frac{6x}{(x^2+3)^2} \\
f''(x) &= \frac{6(x^2+3)^2 - 6x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} \\
&= \frac{6(x^2+3) - 6 \cdot 4x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{6(3-3x^2)}{(x^2+3)^3}
\end{aligned}$$

Bestimmung der Nullstellen:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x^2}{x^2+3} &= 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0 \\
x_1 = 0; x_2 &= 0 \text{ (doppelte Nullstelle)}
\end{aligned}$$

Extrema:

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{6x}{(x^2+3)^2} \;&\Leftrightarrow\; x_E = 0 \\
f(0) = 0;\; f''(0) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} > 0 &\Rightarrow \text{ Minimum bei } (0/0)
\end{aligned}$$

Wendestellen und Krümmung:

$$\begin{aligned}
f''(x) = \frac{6(3-3x^2)}{(x^2+3)^3} &= 0 \;\Leftrightarrow\; 3 - 3x^2 = 0 \\
x_{1/2} &= \pm 1 \\
f''(x) < 0 \text{ für } x < 1 &\Rightarrow \text{ rechtsgekrümmt}
\end{aligned}$$

Verhalten für große/kleine Variablenwerte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} \to \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+3} \to \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1
\end{aligned}$$

Skizze der Funktion im angegebenen Intervall:

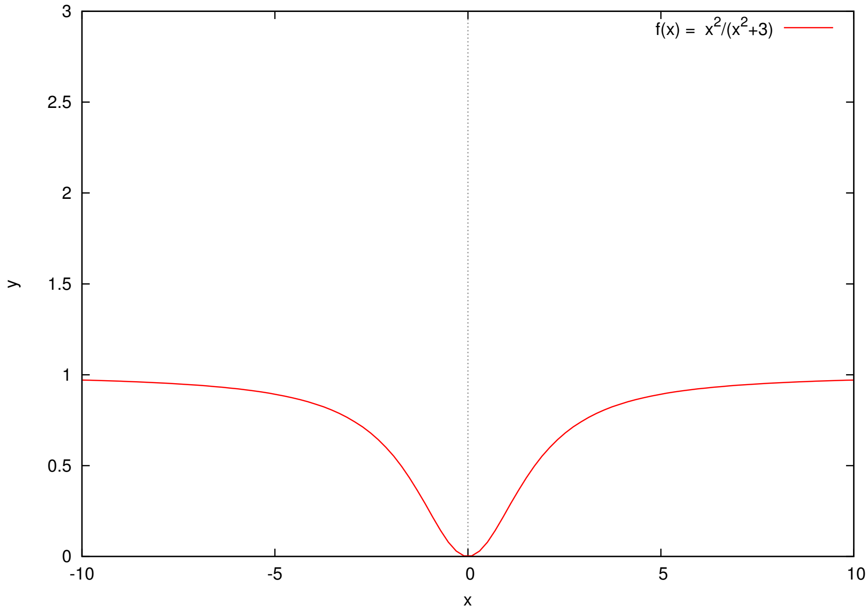

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ im Intervall D.

Aufgabe 5

(11 Punkte)

$$\sqrt{2,1} = (2,1)^{1/2},$$

es liegt nahe, die Funktion

$$f(x) = \sqrt{2+x} = (2+x)^{1/2}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ zu entwickeln:

$$f(x) = \sqrt{2+x} \;\Rightarrow\; f(0) = \sqrt{2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\,(2+x)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}\,(2)^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist das Taylorpolynom

$$T_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x$$

und die Funktion

$$
\begin{aligned}
f(x) &\approx T_1(x) \\
\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2}} &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x\right) \\
&\Rightarrow \frac{\sqrt{2,1}}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} T_1(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0,1\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \cdot 0,1 = 1 + \frac{1}{40} = 1,025.
\end{aligned}
$$

Der dritte Term der Entwicklung ist

$$
\begin{aligned}
\frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 &= \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(2)^{-\frac{3}{2}} x^2 \\
&= -\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}\ \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\ x^2.
\end{aligned}
$$

Man sieht sofort den Faktor $1/8$ im Vergleich zum zweiten Term, für unser $x = 0,1$ ergibt sich durch das Quadrat zusätzlich der Faktor $0,1$, der dritte Term besitzt also $0,1 \cdot 1/8$ der Größe des zweiten.

Aufgabe 6

a) $f(x)$ ist für alle $n > 0$ differenzierbar (Polynom, als normale Funktion stetig in ganz $\mathbb{R}$).

b)

$$
x' = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{x+h-x} = 1
$$

c)

$$
\begin{aligned}
(x^2)' &= (x \cdot x)' = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x \\
(x^3)' &= (x^2 \cdot x)' = x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \\
(x^4)' &= (x^3 \cdot x)' = x^3 \cdot 1 + 3x^2 \cdot x = x^3 + 3x^3 = 4x^3
\end{aligned}
$$

d) Offensichtlich ist $(x^n)' = nx^{n-1}$. Beweis über vollständige Induktion: Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$
x' = 1 \cdot x^0 = 1.
$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot 1\\ &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n = n \cdot x^n + x^n\\ &= (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}\end{aligned}$$