Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM13

M. Oettinger 18.12.2014

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (4+3 Punkte):

(a) Partielle Integration:

$$\int x \cdot \cos(3x)dx = x\frac{\sin(3x)}{3} - \int 1 \cdot \frac{\sin(3x)}{3}dx$$
$$= \frac{x\sin(3x)}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)\cos(3x)}{3} + C = \frac{3x\sin(3x) + \cos(3x)}{9} + C$$

(b) Nutzt man aus, dass $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\, dx$$

und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, so folgt

$$\int_0^\pi (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2\, dx = \int_0^\pi 1dx = [x]_0^\pi = \pi$$

Aufgabe 2

(6 Punkte)
Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

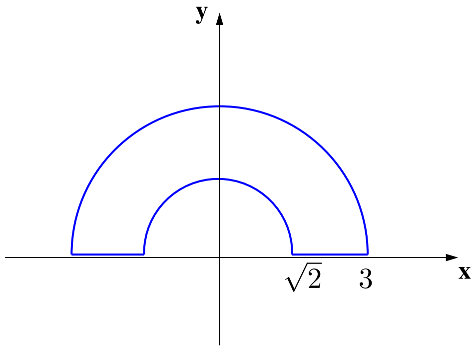

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$A = \iint\limits_{(A)} dA; \quad y \geq 0; \; 2 \leq x^2 + y^2 < 9.$$

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{3} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{3} \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{3} = \pi \frac{9-2}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Aufgabe 3

(9 Punkte)
Es handelt sich um eine lineare, inhomogene DGL 1.Ordnung. Lösung über Variation der Konstanten: die zugehörige homogene DGL ist

$$y_0' + y = 0$$
$$y_0 = C \cdot e^{-\int 1 dx} = C \cdot e^{-x}$$

Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-x}$$
$$y'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$y' + y = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = 2x + 5$$
$$\Rightarrow \quad C'(x)e^{-x} = 2x + 5$$
$$\Rightarrow \quad C'(x) = e^{x}(2x + 5)$$

Integration (partiell) liefert die Funktion $C(X)$

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \int e^x(2x+5)dx = e^x(2x+5) - \int e^x 2dx \\
&= e^x(2x+5) - 2e^x + C = e^x(2x+3) + C.
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C(x) \cdot e^{-x} = (e^x(2x+3) + C) \cdot e^{-x} \\
&= C \cdot e^{-x} + 2x + 3.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(14 Punkte)
Die zugehörige homogene DGL

$$
\dot{I} + \frac{R}{L} I = 0
$$

wird für beide Verfahren benötigt, sie kann über Trennung der Variablen gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{I}_0 = -\frac{R}{L} I(t) \Leftrightarrow \int \frac{dI_0}{I_0} &= -\int \frac{R}{L} dt \\
\ln |I_0| &= -\frac{R}{L} t + \ln |C| \\
I_0(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.
\end{aligned}
$$

Die Lösung der inhomogenen DGL

a) über die Variation der Konstanten: Ansatz ist

$$
\begin{aligned}
I(t) &= C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\
\dot{I}(t) &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}
$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned}
\frac{U_0}{L} &= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\
&= \dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \\
&\Rightarrow \quad \dot{C}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \\
&\Rightarrow C(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} dt = \frac{U_0}{L}\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \\
I(t) = C(t)I_0(t) &= \left(\frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C\right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

b) über das Aufsuchen einer partikulären Lösung: der Störterm ist konstant, also wählen wir als Ansatz

$$I_p(t) = A \quad \Rightarrow \dot{I}_p(t) = 0$$

in die DGL eingesetzt

$$\begin{aligned}
0 + \frac{R}{L}A &= \frac{U_0}{L} \\
I_p(t) = A &= \frac{U_0}{R} I(t) = I_0(t) + I_p(t) = \frac{U_0}{R} + C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y^{(3)} + yx^3 = 4y \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	-	X
nicht-linear	X	-
homogen	-	X
inhomogen	X	-
Ordnung	1	3

Aufgabe 6

(8 Punkte)
$f(x) = \pi \cdot \cos(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \cos(x)dx = 0$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \cos(x)\cos(nx)dx = \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad n = 1 \\ 0 & \text{für} \quad n \neq 1 \end{cases}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \pi \cdot \sin(nx)\cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(x)dx = 0$$

Als einziger Term bleibt also $a_1 = \pi$, in die Fourier-Reihe eingesetzt folgt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = b_1 \sin(1 \cdot x) = \pi \cdot \cos(x).$$

Einfacher findet man die Lösung, wenn man ausnutzt, dass der Kosinus gerade ist, es müssen also alle ungeraden Terme verschwinden ($b_n = 0$). Schreibt man die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \dots$$

aus, erkennt man über einen einfachen Koeffizientenvergleich sofort, dass $a_1 = \pi$.

Aufgabe 7

(8 Punkte)

a) Es handelt sich um eine separable DGL:

$$\frac{d}{dt}f(t) + \lambda f(t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}f(t) = -\lambda f(t)$$
$$\frac{df(t)}{f(t)} = -\lambda dt = 0$$
$$f(t) = C \cdot e^{-\lambda t}.$$

b) Mit der Laplace-Transformierten der Funktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

der 1. Ableitung

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

und der Abkürzung $f(0) = f_0$ lässt sich die DGL wie folgt transformieren:

$$sF(s) - f_0 + \lambda F(s) = 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{f_0}{s+\lambda}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+\lambda}\} = f_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$