Musterlösung zur Klausur Mathematik 1 TMM12

M. Oettinger 28.3.2013

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(8 Punkte):

(a) Betragsfreie Form:

$$r(x) = \frac{1}{|5(x-2)^3|} = \begin{cases} \frac{1}{5(x-2)^3} & \text{für} x \geq 2 \\ -\frac{1}{5(x-2)^3} & \text{für} x < 2 \end{cases}$$

Es handelt sich nicht um eine Funktion - dem Wert $x = 2$ aus D ist kein Wert y zugeordnet.

Symmetrie: sei $x \leq 2$, dann ist

$$r(-x) = \frac{1}{5(-x-2)^3} = -\frac{1}{5(x+2)^3} \neq -r(x) = -\frac{1}{5(x-2)^3}$$

$r(x)$ ist nicht symmetrisch.

(b) Stetigkeit in $x_0 = 2$: mit $u = x - 2$ folgt

$$\lim_{x \to 2+} r(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u \to 0+} \frac{1}{5u^3} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2-} r(x) = \lim_{x \to 2-} -\frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u \to 0-} -\frac{1}{5u^3} = \infty$$

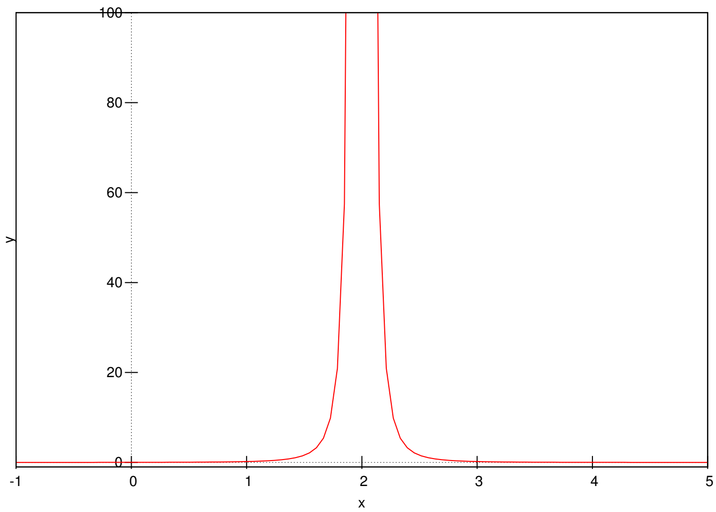
$r(x)$ ist nicht stetig.

(c) Verhalten für $x \to \pm\infty$: mit $u = x - 2$

$$\lim_{x\to\infty} r(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{5u^3} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{5(x-2)^3} = \lim_{u\to-\infty} -\frac{1}{5u^3} = 0,$$

denn $r(u)$ ist ein Polynom, der Grad des Nenners ist größer als der Grad des Zählers.

(d) Skizze der Funktion:



Aufgabe 2

(12 Punkte):

(a) Q entsteht aus P durch Spiegelung an der y-Achse, also

$$Q = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Die Matrixgleichung $AP = Q$ beschreibt das Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -x_1 \qquad \Rightarrow a_{11} = -1; a_{12} = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = x_2 \qquad \Rightarrow a_{21} = 0; a_{22} = 1$$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bei einer Spiegelung an der x-Achse ergibt sich aus P der Punkt

$$R = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Matrix B kann analog berechnet werden:

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 &= x_1 & \Rightarrow b_{11} = 1; b_{12} = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 &= -x_2 & \Rightarrow b_{21} = 0; b_{22} = -1 \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Die Matrix C überführt den Punkt P in $-P$, also

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Produkt $A \cdot B$ ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C$$

Daraus kann geschlossen werden, dass die Punktspiegelung am Ursprung durch zwei Spiegelungen an den Koordinatenachsen ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 3

(8 Punkte):
Majorantenkriterium:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k \cdot k} = b_k$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert. Da alle Reihenglieder $a_k < b_k$ ($k > 0$), konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Berechnung der Summe:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

die Partialsumme s_n lautet

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Aufgabe 4

(6 Punkte):

$$\lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x} = \lim_{x\to 0+} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right)^{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{x^x}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)^{2x}}_{\xrightarrow{x\to 0+} 1}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Aufgabe 5

(5 Punkte):

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & x < 2 \\ a^2(x+2) & x \geq 2 \end{cases}$$

Die Funktion ist stetig in $x = 2$, wenn

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} a^2(x+2) = 4a^2 = \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 8a + 16x = 8a + 32$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 8a + 32 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

Die beiden Lösungen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$

Aufgabe 6

(5 Punkte) Die Potenzreihe für $\cos(i)$ lautet

$$\cos(i) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{i^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} + (-1)\frac{i^2}{2!} + +(-1)^2\frac{i^4}{4!} + (-1)^6\frac{i^6}{6!} + \dots$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{1^2 n}{(2n)!} = \text{cosh}(1) = 1.54308063482$$

Der symbolische Ausdruck $\cos(i)$ kann mit Hilfe der Potenzreihe einfach in eine reelle Zahl umgeschrieben werden.

Aufgabe 7

(6 Punkte):

i) Induktionsanfang: mit $n_0 = 1$

$$1^1 = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}1$$

ii) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1)\\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n + 1 = \frac{n^2+n+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{n^2+2n+1+n+1}{2} = \frac{(n+1)^2+n+1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)\end{aligned}$$

Aufgabe 8

(5 Punkte)

(a)

$$\prod_{i=2}^{5}(i-1)+\sum_{k=0}^{3}(2k+1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1+3+5+7=24+16=40$$

(b)

$$4!+\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1+3+5+7=24+16=40$$

(c)

$$3x^3-24x^2+20x+2=2-25x$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-24x^2+45x=0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x^2-8x+15)=0\Rightarrow x_1=0.$$

$$x^2-8x+15=0,\ \text{Lösung mit } p,q\text{-Formel:}$$

$$x_{2/3}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm 1$$

$$x_2=3,x_3=5$$