Lösung Übungsklausur Mathematik II

TMM12

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} K(v) &= \frac{a^2 v}{v^2+b^2}, v > 0 \\ \Rightarrow K'(v) &= \frac{a^2(v^2+b^2) - a^2 v 2v}{(v^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2v^2 + a^2b^2 - 2a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \\ &= \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\begin{aligned} K'(v) = \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{(v^2+b^2)^2} &= 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2v^2 = 0 \\ \Leftrightarrow v^2 &= b^2 \end{aligned}$$

Weil $v > 0$, ist die positive Lösung der Wurzel

$$v = +\sqrt{b^2}$$

korrekt. Die negative Lösung bedeutet hier einfach eine Geschwindigkeit in die Gegenrichtung.

Aufgabe 2

Ableitung von

a)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}:$$
$$f'(x) = \frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

b)

$$f(x) = \frac{x^2+x}{2x-x^2} = \frac{x(x+1)}{x(2-x)} = \frac{x+1}{2-x}:$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+1}{(2-x)^2} = \frac{3}{(2-x)^2}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(\sqrt{4x}):$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{4x})\cdot\frac{1}{2}(4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4 = \frac{\cos\sqrt{4x}}{\sqrt{4x}}$$

d)

$$f(x) = x^2\cdot\ln(x):$$
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

Aufgabe 3

a) Nullsetzen der ersten Ableitung liefert

$$f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}x,$$

einsetzen der Stelle $x = 2$:

$$a = \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2}.$$

Setzt man die Werte für x und a in die zweite Ableitung ein, so ergibt sich

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 2x + 2a = -3x + 2a = -6 + 2\frac{3}{2} = -3 < 0,$$

es handelt sich also um ein Maximum.

b) Die Steigung ergibt sich aus der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) = -\frac{1}{2}3x^2 + 2ax &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{4}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}3x + \frac{2}{3}\frac{4}{3} &= 0 \\ x_{1/2} = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{2} - \frac{8}{9}} = 1 \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Tangentengleichungen in den Stellen $x_{1/2}$ an die Kurve ergeben sich nach

$$\begin{aligned} t_{1/2}(x) &= f(x_{1/2}) + f'(x_{1/2}) \cdot (x - x_{1/2}) : \\ t_1(x) &= f(\frac{4}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) = 8,52 + \frac{4}{3}(x - \frac{4}{3}) \\ t_2(x) &= f(\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) = 2,81 + \frac{4}{3}(x - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Nullstellen:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3 = 0$$

Erste Lösung (geraten) ist $x_1 = 1$. Durch Partialbruchzerlegung ergeben sich die beiden weiteren Lösungen:

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 4x^2 \qquad + 3\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 3x - 3 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \qquad -3x^2 \\ \qquad \underline{3x^2 - 3x} \\ \qquad\qquad -3x + 3 \\ \qquad\qquad \underline{3x - 3} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$x_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Extrema: benötigt werden die 1. und 2. Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x-8) = 0$$
$$x_1 = 0; x_2 = \frac{8}{3}.$$
$$f''(x) = 6x - 8$$
$$f''(0) = -8 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum mit } f(0) = 3,$$
$$f''(\frac{8}{3}) = 8 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum mit } f(\frac{8}{3}) = \frac{512 - 768 + 81}{27} = -\frac{175}{27}.$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}, f^{(3)}(x) = 6 \neq 0.$$

Asymptoten: das Polynom hat keine Polstellen, Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 4x^2 + 3 = \infty (\text{ höchster Grad des Polynoms überwiegt})$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 4x^2 + 3 = -\infty (\text{ höchster Grad des Polynoms überwiegt})$$

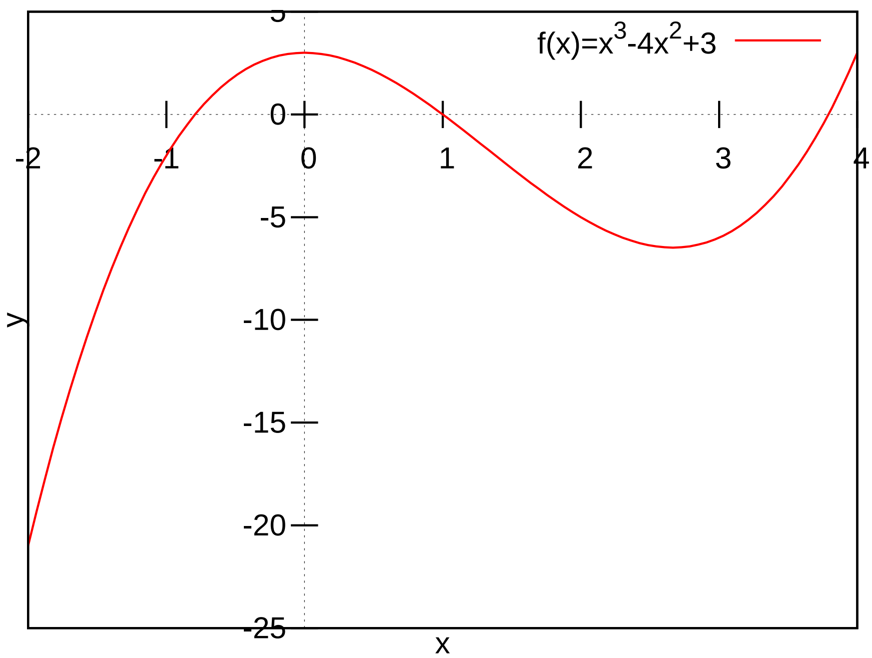

Abbildung 1: die Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ im Intervall $[-2; 4]$.

Aufgabe 5

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= \lim_{h \to 0} 3x^2 = 3x^2
\end{aligned}
$$