Übungsklausur Mathematik III
TMM11

Zeit: 90Min.
Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

13.12.2012

<u>Hilfsformeln</u>

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln \mid x \mid + C$$

$$\ln a - \ln b = \ln \tfrac{a}{b} \qquad \ln a + \ln b = ln(a \cdot b)$$

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Laplace-Transformierte der Heaviside-Funktion

$$H(s) = \mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s}$$

Laplace-Transformierte von Ableitungen

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - \left.\frac{df}{dt}\right|_0$$

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Integrale $\int f(x)dx$ der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 2x^2 \cdot e^x$

(b) $f(x) = \frac{2\sqrt{5}}{x^2-5}$

(12 Punkte)

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebene Fläche und berechnen Sie den Flächeninhalt über ein Doppelintegral.
(5 Punkte)

Aufgabe 3

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = (x + C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(b) Zeigen sie, dass die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{2}$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) Wie nennt man die Lösung in a), wie die Lösung in b)?

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 2x \cdot (y(x))^2$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogene Differentialgleichung

$$y' = 2y + e^{2x}$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 2y + e^{2x}, \qquad y(0) = 22.$$

(7 Punkte)

Aufgabe 6

(a) Klassifizieren Sie die beiden Differentialgleichungen

$$y' + 2y = e^{2y} \qquad (1)$$
$$y'' - y + 4x = 0 \qquad (2)$$

(linear/nicht-linear, homogen, Ordnung?)

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y'' - y + 4x \qquad y(0) = -127?$$

(6 Punkte)

Aufgabe 7

Gegeben sei die 2π-periodische Sägezahnfunktion, die durch $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $0 \leq x < 2\pi$ definiert ist. Sie kann in eine Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden, wobei $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ (es handelt sich um eine ungerade Funktion). Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten b_1.
(7 Punkte)

Aufgabe 8

Ein Elektron bewege sich im statischen und homogenen elektrischen Feld $E(z) = E$. Das Elektron startet bei $t = 0$ am Ort $z = 0$, die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ beträgt $\dot{z}(t = 0) = 0$, das Feld E wird exakt zu $t = 0$ über eine Heaviside-Funktion $H(t)$ eingeschaltet. Auf das Elektron wirkt stets die Kraft $F = q \cdot E$ (mit q: Ladung desElektrons).

(a) Wie sieht die Differentialgleichung zur Bestimmung der Bahn $z(t)$ aus, wenn die Gravitation vernachlässigt wird?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung über eine Laplace-Transformation und geben Sie die Bahnkurve $z(t)$ des Elektrons unter den obigen Randbedingungen an. Sie benötigen dazu die inverse Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2}$$

(8 Punkte)