Musterlösung zur Klausur Mathematik 3 TMM11

M. Oettinger 20.12.2012

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

Integrale (3+6+4+3 Punkte):

(a) Partielle Integration mit $u = x$ und $v' = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin(x) dx &= x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \cdot 1 dx \\ &= -x\cos(x) - (-\sin(x)) + C \\ &= \sin(x) - x \cdot \cos(x) + C \end{aligned}$$

(b)

$$2 \cdot \int \frac{1}{(x^2-1)} dx = \int \frac{2}{x^2-1} dx$$

Partialbruchzerlegung: Nullstellen des Nenners sind $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ \Longrightarrow A(x+1) + B(x-1) &= 2 \end{aligned}$$

Nullstellen eingesetzt $\Longrightarrow A = 1, B = -1$, also

$$\begin{aligned} 2\int \frac{1}{x^2-1} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln \mid x-1 \mid - \ln \mid x+1 \mid + C \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

(c)
$$\int x^2 \ln(2x)dx$$

Partielle Integration mit $u' = x^2 \Rightarrow u = x^3/3$ und $v = \ln(2x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln(2x)dx &= \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln(2x) - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C \\
&= \frac{x^3}{3}\left(\ln(2x) - \frac{1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

(d) Trick: $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, partielle Integration mit $u' = 1 \Rightarrow u = x$ und $v = \ln(x) \Rightarrow v' = 1/x$:

$$\int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$$

Aufgabe 2

Doppelintegral des halben Kreisringes (in Polarkoordinaten, weil es sich um einen Bereich mit Rotationssymmetrie handelt) (6 Punkte):

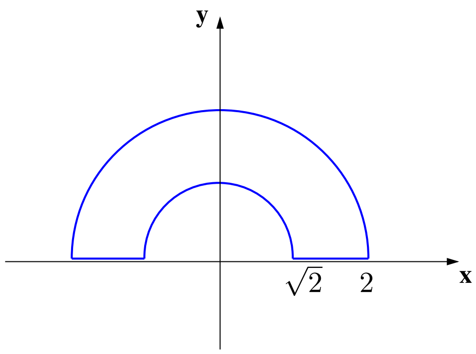

Abbildung 1: Skizze des Bereichs (A)

$$A = \iint\limits_{(A)} dA; \quad y \geq 0;\ 2 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

$$\iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} r dr d\varphi = \int\limits_{r=\sqrt{2}}^{2} \pi r dr = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \pi\frac{4-2}{2} = \pi$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung (1+3+3 Punkte)

(a) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung

(b)

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

$f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

$$y = x \ln x \Longrightarrow y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1 \Longrightarrow y'' = \frac{1}{x}$$

eingesetzt in die Differentialgleichung:

$$x^2 \cdot \frac{1}{x} - x(\ln x + 1) + x \ln x = 0$$

(c)

$$f(x) = -\frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{x^2}, f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

einsetzen in die Gleichung liefert

$$-x^2\frac{2}{x^3} - x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \neq 0$$

$f(x)$ ist keine Lösung.

Aufgabe 4

Trennung der Variablen (4 Punkte):

$$y' = y^2 \cdot (sinx + 1)$$

$$\frac{dy}{y^2} = (\sin x + 1)dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (\sin x + 1)dx$$

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + x + C$$

$$y = \frac{1}{\cos x - x - C}$$

Eine zusätzliche Lösung ist $y(x) = 0$.

Aufgabe 5

Anfangswertproblem (10 Punkte): Lösung der inhomogenen, linearen DGL 1 Ordnung

$$y'(x) + 2y(x) = e^{-x} \Rightarrow f(x) = 2,\ h(x) = e^{-x}$$

Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_0'(x) + 2y_0(x) = 0$ über Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{y_0} &= -2dx \\ \int \frac{dy_0}{y_0} &= -2\int dx \Rightarrow \ln|y_0| = -2x + \ln|C| \\ y_0(x) &= C \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} C \to C(x);\ y_0(x) \to y(x) &= C(x) \cdot e^{-2x} \\ y'(x) &= C'(x) \cdot e^{-2x} - 2C(x) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Einsetzen von $y(x)$ und $y'(x)$ in die inhomogene DGL liefert

$$\begin{aligned} C'(x) \cdot e^{-2x} - 2C(x) \cdot e^{-2x} + 2C(x) \cdot e^{-2x} &= e^{-x} \\ C'(x) \cdot e^{-2x} &= e^{-x} \Rightarrow C'(x) = e^{x} \\ &\Rightarrow \int C'(x)dx = \int e^{x}dx \\ &\Rightarrow C(x) = e^{x} + K \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x) \cdot e^{-2x} = (e^{x} + K)\, e^{-2x} \\ &= K \cdot e^{-2x} + e^{-x}. \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten K aus der Randbedingung:

$$\begin{aligned} y(0) &= K \cdot e^{0} + e^{0} = K + 1 = 1 \\ &\Rightarrow K = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = e^{-x}.$$

Aufgabe 6

Differentialgleichungen (3 Punkte):

$$y'^2 + 2y - 3x + \sin x = 0 \tag{1}$$

$$y'' = 4x \tag{2}$$

Gleichung	(1)	(2)
linear	X	X
nicht-linear	-	-
homogen	-	-
inhomogen	X	X
Ordnung	1	2

Aufgabe 7

$f(x) = 6,25$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden (4 Punkte):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$f(x) = 6,25 = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(x) + b_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + ...$$

Ein simpler Koeffizientenvergleich liefert

$$6,25 = \frac{a_0}{2} \qquad 0 = a_n \sin(nx); 0 = b_n \cos(nx) \quad \forall n > 0$$

$$\Longrightarrow a_0 = 2 \cdot 6,25 = 12,5 \qquad a_n = 0; b_n = 0 \quad \forall n > 0$$

Aufgabe 8

(5 Punkte)

a) $f(x) = \cos(x+1)$ ist ein um den Betrag 1 nach links verschobener Kosinus und damit 2π-periodisch.

b) $f(x) = x \cdot \cos(5x)$ ist nicht periodisch, da für kein $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $x \cdot \cos(x) = (x+L) \cdot \cos(x+L)$ gilt.

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 1 - 2 = -1$ (mit dem Adiitionstheorem $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$). Die Funktion $f(x) = -1$ kann natürlich als periodisch angesehen werden, das Periodenintervall ist jedes beliebige $x \in \mathbb{R}$.