Musterlösung zur Nachklausur Mathematik 1 TMM15

M. Oettinger 12.5.2016

Zeit: 90Min.

Insgesamt erreichbare Punktzahl: 55, 100%: 50 Punkte.

Aufgabe 1

(10 Punkte):

$$
\begin{aligned}
AB &= 5 \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
CD &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 16 & 3 & 11 \end{pmatrix} \\
DC &\ \text{existiert nicht.} \\
BC &\ \text{existiert nicht.} \\
CB &= \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \\
DB &\ \text{existiert nicht.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(10 Punkte):
$f:]0, \infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(x) + x$.

a) $u(x) = \ln(x)$ ist streng monoton steigend, $v(x) = x$ ist streng monoton steigend $\Rightarrow$ die Summe $u + v$ ist ebenfalls streng monoton steigend und deshalb umkehrbar.

b) Grenzwert für $x \to 0+$:

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x)+x = \lim_{x\to 0+} \ln(x) + \lim_{x\to 0+} x = \lim_{x\to 0+} \ln(x) + 0 = \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$$

f besitzt keinen Grenzwert. Für $x < 0$ ist $\ln(x)$ nicht definiert, für große x steigen $\ln(x)$ und x bis ins Unendliche.

c) Skizze:

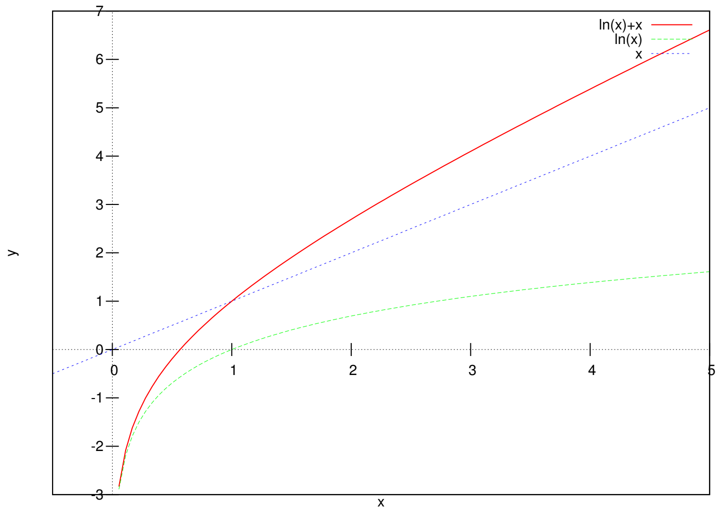

Abbildung 1: Skizze der Funktion $\ln(x) + x$

Aufgabe 3

(10 Punkte):

$$(1) : f(x) = \sqrt[3]{x}$$

ist für $x \geq 0$ eine Funktion, jedem Variablenwert ist eindeutig ein Funktionswert zugeordnet.

$$(2) : g(x) = \sqrt{x}$$

ist für $x \geq 0$ keine Funktion, jedem Variablenwert $x > 0$ sind zwei Funktionswerte zugeordnet.

$$(3) : h(x) = (|x|)^{\frac{1}{2}}$$

ist für $x \geq 0$ gleich $g(x)$ - keine Funktion.

$$(4) : k(x) = |x|$$

ist für $x \geq 0$ eine Funktion, jedem Variablenwert ist eindeutig ein Funktionswert zugeordnet.

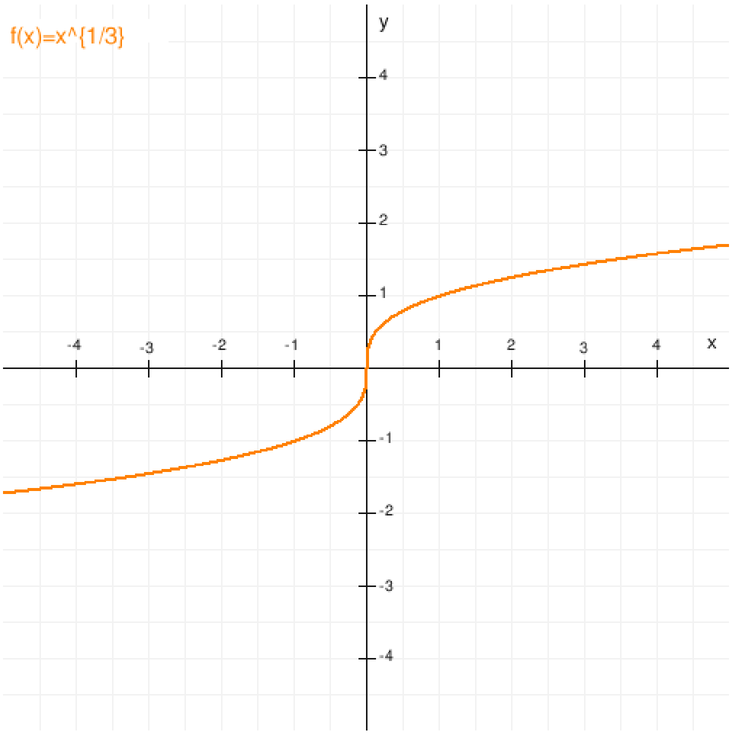

Abbildung 2: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ hat eine Nullstelle bei $x_0 = 0$

Die dritte Wurzel wird im Negativen meist nicht definiert - sie führt zu Problemen mit der Potenzschreibweise, beispielsweise ist für $x = -1$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} &= -1 \\ &= (-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1\end{aligned}$$

Da aber $-1 \neq 1$ ist diese Definition nicht sinnvoll.

Aufgabe 4

(9 Punkte):
Beweis mittels vollständiger Induktion:
Induktionsanfang mit $n_0 = 0$:

$$n_0^3 + 2n_0 = 0, \text{ ohne Rest durch drei teilbar.}$$

Induktionsschritt:
die Voraussetzung ist

$$n^3 + 2n \text{ ist durch drei teilbar.}$$

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot n + 1 + 2n + 2\\ &= n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

Der vordere geklammerte Ausdruck ist nach Voraussetzung teilbar durch drei, der hintere geklammerte Ausdruck ist ein ganzzahliges Vielfaches von drei - also natürlich teilbar durch drei.

Aufgabe 5

(8 Punkte):
Algebraische Normalform:

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 3 \cdot (0 + i) = 3i.$$

Mit $z_2 = 2 + i \cdot 3$:

$$z_1 - z_2 = 3i - (2 + 3i) = -2.$$

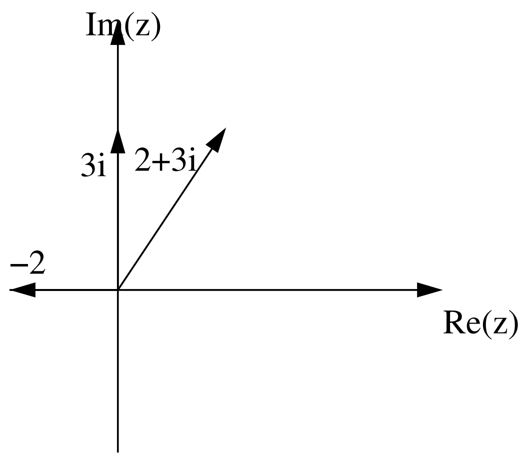

Abbildung 3: Darstellung von z_1, z_2 und $z_1 - z_2$ in der Gaußschen Zahlenebene

Aufgabe 6

(8 Punkte)

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-1}+x &= 0 \\ \sqrt{2x^2-1} &= -x \\ 2x^2-1 &= x^2 \\ &\Rightarrow x_{1/2} = \pm 1 \end{aligned}$$

b)

$$\sqrt{\frac{4-x}{x+2}} \in \mathbb{R}, \text{ wenn } \frac{4-x}{x+2} > 0$$

$$4-x > 0 \Rightarrow x < 4$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Die Werte der Wurzel sind reell für $-2 < x < 4$.