Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Geben Sie an, welche der Matrizenprodukte $AB, BA, CD, DC, BC, CB, DB$ existieren und berechnen Sie sie.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $f :]0, \infty[\longmapsto \mathbb{R}, x \longmapsto \ln(x) + x$.

a) Warum ist f auf dem gesamten Definitionsbereich umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \to 0+$? Wenn ja, welchen? Wie verhält sie sich für $x \to \pm\infty$?

c) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ in einem geeignet gewählten Intervall.

Aufgabe 3

Welche der Relationen

$$(1) : f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (2) : g(x) = \sqrt{x} \quad (3) : h(x) = (|x|)^{\frac{1}{2}} \quad (4) : k(x) = |x|$$

sind im Definitionsbereich $D = [0; \infty]$ Funktionen? Warum?

Wie sieht die Funktion oder Relation $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aus (Skizze!), wo hat sie Nullstellen (keine Berechnung!)? Warum wird auch die (nicht komplexe) dritte Wurzel negativer Zahlen ($\sqrt[3]{x}; x < 0$) in vielen Lehrbüchern nicht definiert?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $n^3 + 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$ ohne Rest durch drei teilbar ist.

Aufgabe 5

Rechnen Sie die folgende komplexe Zahl in ihre algebraische Normalform ($z = a + ib$) um:

$$z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Berechnen Sie die Differenz von z_1 und $z_2 = 2 + i \cdot 3$ und stellen Sie z_1, z_2 und $z_1 - z_2$ als Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ erhält man reelle Werte der Wurzel

$$\sqrt{\frac{4 - x}{x + 2}}$$