Musterlösung zur Nachklausur
Mathematik III
TMM12

17.2.2014

Aufgabe 1

(a)

$$\begin{aligned}\int e^x(2-x^2)dx &= e^x(2-x^2) - \int e^x(-2x)dx \\ &= e^x(2-x^2) + e^x 2x - \int 2e^x dx \\ &= e^x(2-x^2) + e^x 2x - 2e^x + C \\ &= e^x(2-x^2+2x-2) + C = e^2(2x-x^2) + C\end{aligned}$$

(b)

$$\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx \quad \text{Substitution: } u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

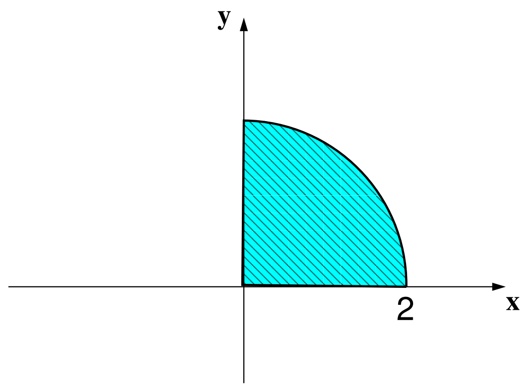
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(3x^2)dx &= \int_{u=0}^{u=3\cdot\sqrt{\pi/3}^2} 2x\sin(u)\frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin(u)du = \frac{1}{3}\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bei der durch

$$x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

gegebenen Fläche handelt es sich um einen Viertelkreis mit Radius $R = 2$:



In Polarkoordinaten (Rotationssymmetrie!)

$$\begin{aligned} A &= \iint dA = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} r dr d\varphi \\ &= \int_{r=0}^{2} [\varphi]_0^{\pi/2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r dr \qquad = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Differentialgleichung

$$y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$$

(a) $y(x) = (x+C)^2 + C^2$, $(x > 0)$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$\begin{aligned} y &= (x + C)^2 + C^2 = x^2 + 2xC + 2C^2 \\ y' &= 2x + 2C \end{aligned}$$

in die DGL:

$$\begin{aligned} &(2x + 2C)^2 - 2x(2x + 2C) - 2(x^2 + 2xC + 2C^2) + 2x^2 \\ =&(4x^2 - 8xC + 4C^2 - 4x^2 - 4xC - 2x^2 - 4xC - 4C^2 + 2x^2 \\ =&0 \end{aligned}$$

(b) $y(x) = x^2/2$ ist eine Lösung der DGL, wenn sie mit ihren Ableitungen die DGL identisch erfüllt:

$$y = \frac{x^2}{2}$$
$$y' = \frac{2}{2}x = x$$

in die DGL:

$$x^2 - 2xx - 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 = x^2 - 2x^2 - x^2 + 2x^2 = 0$$

(c) Die Lösung in a) enthält einen freien Parameter, sie ist die allgemeine Lösung der DGL $y'^2 - 2xy' - 2y + 2x^2 = 0$. Die Lösung in b) ist eine spezielle (oder partikuläre Lösung).

Aufgabe 4

Lösung über Sepration der Variablen:

$$y'(x) = \frac{2x}{\cos(y)} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(y)dy = 2xdx$$
$$\int \cos(y)dy = \int 2xdx$$
$$\sin(y) = \frac{2}{2}x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \arcsin\left(x^2 + C\right)$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 5

Es handelt sich um eine inhomogene, lineare und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y_0' + 2y_0 = 0$:

$$\frac{dy_0}{dx} = -2y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy_0}{y_0} = -2dx$$
$$\int \frac{1}{y_0}dy_0 = \int -2dx$$
$$y_0 = C \cdot e^{-2x}$$

Ansatz für Variation der Konstanten ist $y(x) = C(x)e^{-2x}$
$\Rightarrow \quad y'(x) = C'(x)e^{-2x} + C(x)e^{-2x}(-2)$. Eingesetzt in die inhomogene DGL:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-2x} + C(x)e^{-2x}(-2) + 2C(x)e^{-2x} &= e^{-2x} \\ C'(x)e^{-2x} &= e^{-2x} \\ C'(x) &= 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x + K \\ y(x) = C(x)e^{-2x} = (x+K)e^{-2x}, & \end{aligned}$$

Das ist die allgemeine Lösung der DGL. Bestimmung der Konstanten K:

$$y(0) = 0 + K = 3$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(x) = (x+3)e^{-2x}.$$

Aufgabe 6

(a)

$$y' + 2y = e^{2y} \tag{1}$$
$$y'' - y + 4x = 0 \tag{2}$$

Gleichung (1) ist eine nichtlineare, homogene und gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.
Gleichung (2) ist eine lineare, inhomogene und gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung.

(b) Die allgemeine Lösung der DGL (1) enthält (DGL 1. Ordnung) einen freien Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(c) Die allgemeine Lösung der DGL (2) enthält (DGL 2. Ordnung) zwei freie Parameter - sie hat unendliche viele Lösungen.

(d) Durch die Randbedingung wird einer der beiden freien Parameter festgelegt, es bleiben noch immer unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 7

Ausschreiben der Fourierreihe liefert die Lösung über einen einfachen Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx) \\
12b &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(nx) + \dots \\
&\Rightarrow 12b = \frac{a_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = 24b \\
&\Rightarrow a_n = 0 \forall n > 0; \quad b_n = 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Das Elektron der Masse m im elektrischen Feld $E = const$ erfährt die Kraft $q \cdot E$, es beschleunigt nach

$$F = m \cdot a \;\Leftrightarrow\; q \cdot E = m\ddot{z(t)}$$

(a) Das Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ geschieht über die Heaviside-Funktion

$$H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, t \to \begin{cases} 0, \text{ falls } t \leq 0 \\ 1 \text{ falls } t > 0 \end{cases},$$

also ergibt sich für die zu lösende DGL

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{qE}{m} H(t) = 0.$$

oder für $t > 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} z(t) - \frac{qE}{m} = 0.$$

(b) Lösung der DGL in zwei Schritten:

$$\ddot{z} = \frac{qE}{m} = K$$
$$\int \ddot{z}dt = \int K dt \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = K \cdot t + C$$
mit $\dot{z}(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$
$$\int \dot{z}dt = K \int t dt \quad \Rightarrow \quad z(t) = K\frac{t^2}{2} + C$$
mit $Z(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$
$$\Rightarrow z(t) = K\frac{t^2}{2} = \frac{qE}{2m}t^2$$