Aufgabe 1

Gegeben ist eine Relation $r(x)$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$:

$$r(x) = |(x-3)^2 - 1|$$

(a) Handelt es sich um eine Funktion? Schreiben Sie $r(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie die Relation auf Symmetrie.

(b) Ist sie monoton? Ist sie in ihren Nullstellen stetig?

(c) Wie verhält sich $r(x)$ für große/kleine Variablenwerte?

(d) Skizzieren Sie $r(x)$ in einem geeigneten Bereich.

Aufgabe 2

Berechnen bzw. lösen Sie

a)

$$2(x^3 - x) + 4(1 - x^2) = 0$$

b)

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) + \prod_{k=1}^{3}(2k+1)$$

c)

$$x^2 - x + \frac{5}{2} = 0$$

Stellen Sie die Lösungen auf geeignete Weise grafisch dar. Wie groß ist die Summe der beiden Lösungen?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a^2(x+4) & \text{für} \quad x < 1 \\ 3(10a - 15x) & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion in $x_0 = 1$ stetig ist.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt

$$n^2 + n \text{ ist eine gerade Zahl}$$

(also für $n \in \mathbb{N}$ ohne Rest durch 2 teilbar).

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2},$$

falls ein Grenzwert existiert.

Aufgabe 6

Eine komplexe Zahl z_1 kann in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = \sqrt{2}$ dargestellt werden

a) Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gilt (ein rechtwinkliges Dreieck mit den beiden Kathetenlängen $a = b = 1$ ist hilfreich!)

b) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

c) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z_1 = a + i \cdot b$ und in der Polardarstellung dar

d) Wie lautet der Betrag $|z_1|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ zu z_1?

e) Gegeben sei eine weitere Zahl $z_2 = 1 + 2i$. Berechnen Sie den Quotienten z_2/z_1.