Aufgabe 1

Gegeben ist die Relation

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|; \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Handelt es sich bei $f(x)$ um eine Funktion? Warum?

b) Schreiben Sie die Relation in betragsfreier Form und skizzieren Sie den Verlauf in einem geeignet gewählten Intervall (Tipp: quadratisch Ergänzen hilft...)

c) Hat die Relation in ihrem Kurvenverlauf Lücken?

Aufgabe 2

Berechnen bzw. lösen Sie

a)

$$2x^3 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) + \prod_{k=1}^{3}(2k+1)$$

c)

$$x^2 - x + \frac{5}{2} = 0$$

Stellen Sie die Lösungen auf geeignete Weise grafisch dar. Wie groß ist die Summe der beiden Lösungen?

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a^2(x+4) & \text{für} \quad x < 2 \\ 3(10a - 6x) & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion in $x_0 = 2$ keine Lücke hat.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen gilt

$$n^2 + n \text{ ist eine gerade Zahl}$$

(also für $n \in \mathbb{N}$ ohne Rest durch 2 teilbar).

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} (\sin(x))^{2x}$$

(Hinweis: $\lim_{x \to 0+} x^x = 1$).

Aufgabe 6

Eine komplexe Zahl z_1 wird in der Gaußschen Zahlenebene durch den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und die Länge $r = 2\sqrt{2}$ dargestellt
$(\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}})$.

a) Skizzieren Sie die Zahl in der Gauß-Ebene

b) Stellen Sie die Zahl in der kartesischen Form als $z_1 = a + i \cdot b$ und in der Polardarstellung dar

c) Wie lautet der Betrag $|z_1|$ und die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z_1}$ zu z_1?

d) Gegeben sei eine weitere Zahl $z_2 = 1 + 2i$. Berechnen Sie den Quotienten z_2/z_1.