Hilfsformeln

Fourierkoeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Euler-Formel
$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Laplace-Transformierte:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = F(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(t=0)$$

**Aufgabe 1**

Gegeben sei ein Bereich $(A)$ : $\quad x \geq 0;\ 0 \leq x^2 + y^2 < 4$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie das Doppelintegral über die Funktion $f(x) = x$ innerhalb des Bereichs $(A)$

$$\iint\limits_{(A)} x dA; \qquad x \geq 0; 0 \leq x^2 + y^2 < 4.$$

Welche Art von Koordinaten sind sinnvoll? Warum?

**Aufgabe 2**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

a)
$$\int_0^\pi (\cos(-x))^2 + (\sin(x))^2\, dx$$

b)
$$\int_0^\pi x\cos(2x)dx$$

c)
$$\int xe^{-x^2}dx$$

## Aufgabe 3

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

$$2y' + y = \sqrt{y} \tag{1}$$
$$y'' - y + 3x = x \tag{2}$$

(b) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (1)?

(c) Wieviele Lösungen besitzt die DGL (2)?

(d) Wieviele Lösungen besitzt das Anfangswertproblem zur DGL (2)

$$y'' - y + 3x = x; \qquad y(0) = -127?$$

## Aufgabe 4

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' - 2x \cdot y = 7x.$$

Um was für eine DGL handelt es sich? bestimmen Sie alle Lösungen der DGL.
Hinweis: das auftretende Integral ist das 3. Integral aus Aufgabe 2

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

## Aufgabe 5

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x > 0$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x \ln x$, $(x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

(c) ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$ ebenfalls eine Lösung?

**Aufgabe 6**

Gegeben sei die $2\pi$-periodische Sägezahnfunktion, die durch

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

für $0 \leq x < 2\pi$ und die periodische Fortsetzung definiert ist. Sie genügt den Dirichletschen Bedingungen und kann in eine Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

entwickelt werden, wobei $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, ...$ (es handelt sich um eine ungerade Funktion). Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten mit der Nummer zwei ($b_2$).

**Aufgabe 7**

Beim radioaktiven Zerfall ist der Bruchteil $dN$ der Atomkerne eines Nuklids, die sich in einem Zeitintervall $dt$ umwandeln, proportional zur Anzahl $N$ der jeweils vorhandenen radioaktiven Kerne ($\lambda$ ist die Zerfallskonstante):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

a) Lösen Sie die DGL durch Integration mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$

b) Lösen Sie die DGL über eine Laplace-Transformation mit der Randbedingung $N(t = 0) = N_0$.