Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie die Funktion in betragsfreier Form und untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrie. Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion? (3 Punkte)

(b) Untersuchen Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

(c) Besitzt die Funktion einen Grenzwert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$? Wenn ja, welchen? (2 Punkte)

(d) Es gilt offensichtlich $f(1,4) > 0$ und $f(-2,6) < 0$, also muss die Funktion $f(x)$ im Intervall $I = [-2,6; 1,4]$ eine Nullstelle besitzen. Schätzen Sie diese Nullstelle mit dem Intervallhalbierungsverfahren, indem Sie maximal 4 Iterationen durchführen. Was folgt aus dem Ergebnis? (3 Punkte)

(e) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $D = [-5; 5]$. (3 Punkte)

Aufgabe 2

(13 Punkte)
Gegeben sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$

(a) ist $g \parallel E$?

(b) liegt g in der Ebene E?

(c) schneidet die Gerade g die Ebene E?

Aufgabe 3

(4 Punkte)
Untersuchen Sie die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 4

(6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Sinus den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} (\sin(x))^{2x}$$

(Hinweis: $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$).

Aufgabe 5

f und g seien reelle Funktionen und $u = f + g, v = f - g$.

(a) Warum sind f und g stetig, wenn sowohl u als auch v stetig sind? (4 Punkte)

(b) Warum folgt aus der Stetigkeit von u allein nicht die Stetigkeit von f und g (Hinweis: es lässt sich leicht ein Gegenbeispiel finden)? (6 Punkte)

Aufgabe 6

(5 Punkte)
Berechnen Sie die komplexe Zahl $\sin(i)$.

Aufgabe 7

(7 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot k = \frac{3}{4}\left[3^n(2n-1)+1\right].$$