Aufgabe 1

Berechnen Sie die ganze Zahl $x_0 \in \mathbb{Z}$, für die das Produkt ihres Vorgängers $(x_0 - 1)$ und ihres Nachfolgers $(x_0 + 1)$ möglichst klein wird.

Wie sieht die Funktion aus, die das Produkt $P(x)$ beschreibt (Skizze)?

Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen lassen sich ableiten? Bestimmen Sie die erste Ableitung, sofern möglich.

a)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 1}; \qquad x \in \mathbb{R}$$

b)

$$f(x) = 3\cos(x^2 + 3)$$

c)

$$f(x) = e^{12 \cdot \sin(x)}$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie a so, dass die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + ax^2 + 2$$

in $x = 2$ eine Extremstelle hat. Um welche Art von Extremstelle handelt es sich ?

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0; y_0)$, an denen eine Tangente mit der Steigung $m = 4/3$ an das Schaubild der oben bestimmten Funktion f angelegt werden kann. Geben Sie die Gleichungen dieser Tangenten an.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die Relation

$$r(x) = x \cdot \frac{x^2 - 4}{2} \;; \quad x \in \mathbb{R}$$

auf Nullstellen, Extrema, Wendestellen, Symmetrie, Stetigkeit und ihr Verhalten für große und kleine Variablenwerte. Handelt es sich um eine Funktion?

Skizzieren Sie die Relation in einem geeignet gewählten Intervall

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x}$$

b)

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln(x)$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe des Grenzwerts des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$.